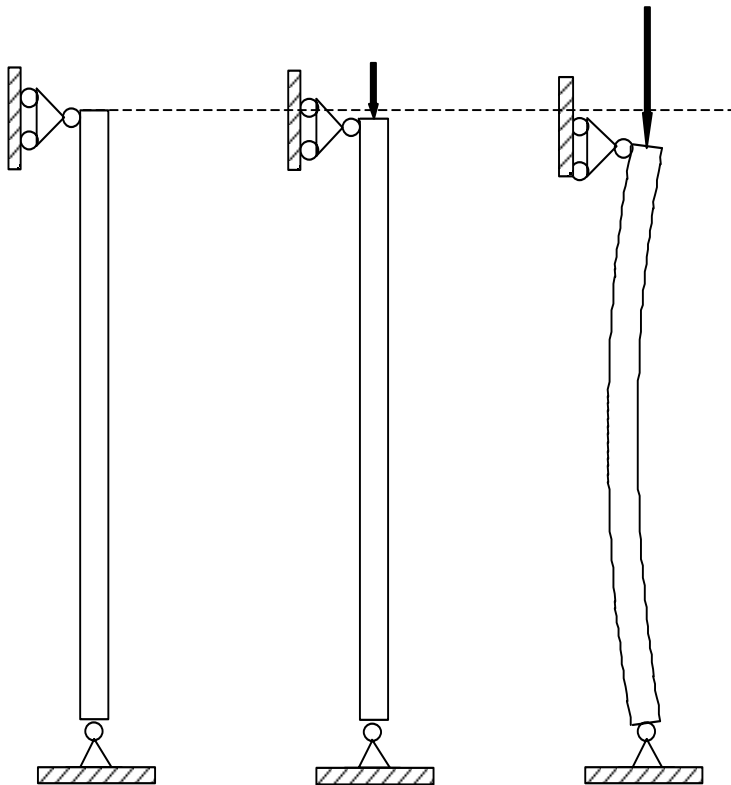


Mechanica

Samenvatting en opdrachten
voor trimester 1.1

J.H.P. de Vree
2003



Faculteit
Werktuigbouwkunde

Technische Universiteit Eindhoven

**Samenvatting van en zelfstudiehandleiding bij "Mechanics of Solids",
leerboek bij het 1^e trimestervak mechanica (4A130).**

**J.H.P. de Vree
2003**

N.B. Lees de inleiding a.u.b..

Inleiding

Bij het bestuderen van het vak “Mechanica” zal een groot beroep op zelfwerkzaamheid worden gedaan. Het ligt in de aard van dit vak dat het aantal concepten betrekkelijk klein is, maar dat de verschijningsvorm van de relaties daartussen zeer divers is. Het leren toepassen van de concepten uit de mechanica kan alleen geleerd worden door veel ervaring in het toepassen in veel verschillende situaties. Onder meer om u een richtlijn te geven voor het werk dat van u verwacht wordt, is deze handleiding geschreven. Deze handleiding bevat verder een korte samenvatting van de leerstof die u het bestuderen van het boek “Mechanics of Solids” naar ik hoop zal vergemakkelijken. Deze samenvatting moet echter in combinatie met het boek worden gelezen omdat veelvuldig wordt verwezen naar de figuren of andere delen van het boek. De derde doelstelling van dit diktaatje is het toevoegen van de nederlandse terminologie in de mechanica aan het engelstalige leerboek.

De ongetwijfeld meest effectieve manier van studeren is het bestuderen van de samenvatting vóór het college, maar dit vereist een grote mate van zelfdiscipline. Zo’n grote mate van zelfdiscipline wordt van een moderne ingenieur in opleiding verwacht, en u wordt daar op aangesproken.

U weet in dat geval waar u tijdens de 2 uur college op moet letten om alles te begrijpen.

Zoals u weet staat er 3 uur per week genoteerd voor zelfstudie thuis. Als u tijdens het college echt bij de les blijft dan kunt u het merendeel van deze tijd gebruiken voor het bestuderen van de overvloed aan uitgewerkte voorbeelden en het maken van een aantal van de voorgestelde vraagstukken en oude tentamenopgaven.

Door de beperkte hoeveelheid tijd zullen lang niet alle voorbeelden tijdens het college aan bod komen. **Er wordt van u verwacht dat u in de tijd tussen het college en de begeleide zelfwerkzaamheid de theorie die op het college behandeld is, bestudeert, en de daar bij behorende voorbeelden tracht te maken. Lukt dit niet dan kunt u naar de uitwerking bij de voorbeelden kijken.**

In de eerste week vindt geen begeleide zelfwerkzaamheid plaats en u wordt dan verzocht de opgegeven problemen uit het boek thuis zelf op te lossen. Als u er niet uit komt, kunt u er vragen over stellen tijdens de eerste begeleidingsuren. (n.b. hoofdstuk 1 is voornamelijk een herhaling van de stof van de middelbare school)

Daarna moet u in staat zijn om de voorgestelde opgaven die aan het einde van ieder hoofdstuk in de samenvatting opgegeven staan, te maken tijdens de begeleide zelfstudie. Als u in tijdnood komt probeer dan tenminste een oplossingsstrategie te maken bij de opgegeven opgaven.

Tijdens de 2 uur begeleide zelfstudie, die iedere week plaats vindt, kunt u uiteraard ook vragen stellen over de vraagstukken die u thuis heeft gemaakt.

Naast de theorie zijn er ook nog trainingen met het softwarepakket MARC/MENTAT.

Deze trainingen zijn niet vrijblijvend.

Bij de tentamens van dit vak zal uw vaardigheid in het oplossen van problemen met behulp van deze software worden getoetst. Neem het advies om vanaf het begin, gedurende de daarvoor beschikbare tijd hard te werken ernstig. Ik weet uit jarenlange ervaring dat, als u dat niet doet, de kans van slagen vrijwel nihil is.

Hier staat tegenover dat het vak, mits met interesse en inzet beoefend, buitengewoon boeiend is.

Ik wens u veel plezier en succes bij de beoefening van dit vak.

J.H.P. de Vree.

Nagestreefde tijdschema (wijziging door overmacht voorbehouden)

Collegeweek nr	Eerste sessie van 2 college-uren	Tweede sessie van 2 college-uren
1	College over Hoofdstuk 1, Introductie Herhaling van de VWO mechanica	College over Hoofdstuk 1, Introductie Herhaling van de VWO mechanica
2	College over Hoofdstuk 2 Demo met MARC/MENTAT	Begeleide oefeningen bij hoofdstuk 2
3	College over Hoofdstuk 3	Begeleide oefeningen bij hoofdstuk 3
4	College over Hoofdstuk 4	Begeleide oefeningen bij hoofdstuk 4
5	College over paragrafen 5.1 en 5.2	Begeleide oef. bij par. 5.1 en 5.2
6	College over Hoofdstuk 5.3 en 5.4	Begeleide oef. bij par. 5.3 en 5.4
7	College over Hoofdstuk 6	Begeleide oefeningen bij hoofdstuk 6
8	College over Hoofdstuk 6, en demo met MARC/MENTAT	Begeleide oefeningen bij hoofdstuk 6 en MARC/MENTAT oefeningen.
9	College over Hoofdstukken 7 en 8	Begeleide oefeningen. bij hoofdstukken 7 en 8

Het eerste deeltentamen gaat in principe over de leerstof van de eerste vijf weken.

1 Introductie

Herhaling van de V.W.O. mechanica; Colleges en opdrachten in de eerste week .

Algemene begrippen en evenwicht.

Statica: De versnellingen van de beschouwde lichamen zijn nul of verwaarloosbaar klein.

Mechanica van starre lichamen: Alleen het krachten- en momentenevenwicht van de constructie is van belang. De sterkte (maximale belasting) en stijfheid (weerstand tegen deformatie) worden in eerste instantie oneindig verondersteld en spelen dus geen rol.

Mechanica van deformeerbare lichamen of mechanica van materialen of sterkteleer: Voor de oplossing is een beschouwing van de deformatie noodzakelijk. De sterkte is eindig en de stijfheid is afhankelijk van het materiaal en de vorm van de constructie. Als de deformatie volledig "herstelt" (recoverable is) spreken we van **elastische deformatie**. Bij blijvende deformatie na het weghalen van de belasting spreken we van **plastische deformatie**.

Te grote deformatie en breuk zijn vormen van faalgedrag van een constructie.

Een **kracht** kan opgevat worden als een interactie tussen lichamen die versnelling en/of vervorming van de lichamen tracht te veroorzaken (door contact of door veldwerking zoals bijvoorbeeld bij elektrische en magnetische veldwerking of het zwaartekrachtsveld).

Krachten zijn vectoriële grootheden. D.w.z. ze hebben een grootte en een richting en kunnen dus ontbonden of samengesteld worden met behulp van de parallelogram constructie.

Skalare grootheden hebben alleen een grootte.

Een puntkracht op een constructie is de **resultante van een krachtverdeling** in de buurt van een materieel punt (zie figuur 1.2).

Evenwicht van een lichaam is een versnellingsloze toestand van het lichaam (zowel m.b.t. translaties als m.b.t. rotaties).

Het **moment van een kracht ten opzichte van een punt** is het product van de grootte van de kracht en de loodrechte afstand van dat punt tot de werklijn van de kracht.

Het moment is een **vectoriële grootheid** en heeft dus een grootte en een richting.

De keuze van de positieve draairichting bepaalt het teken van het moment.

Een **koppel** bestaat uit twee even grote evenwijdige maar tegengesteld gerichte krachten.

Het moment van het koppel is ten opzichte van ieder punt in het vlak van het koppel hetzelfde (zie figuur 1.3 en de tekst daaronder).

Beperking tot vlakke constructies: Alle krachten liggen in het vlak van de constructie en alle momenten staan daar loodrecht op.

De **drie wetten van Newton** luiden in telegramstijl:

1. Zonder kracht op een lichaam geen versnelling van dat lichaam.
2. $\text{Kracht} = \text{massa} \cdot \text{versnelling}$, geldt voor een puntmassa en het zwaartepunt van een lichaam.
3. Actie is reactie.

Bij een lichaam in rust geldt evenwicht van ieder willekeurig geïsoleerd deel daarvan.

In het boek wordt dan gesproken van "**free body diagrams**".

Na het "**snijden**" in de constructie worden de "**interne krachten**" (krachten op de sneden) de externe krachten op de geïsoleerde delen. (zie figuur 1.4). Toepassing van de derde wet van Newton is bij het snijden van groot belang.

Bij een lichaam in evenwicht (of geïsoleerd deel daarvan) waarop 3 niet evenwijdige krachten werken vormen de krachtvectoren een gesloten driehoek want de resultante is nul (figuur 1.5)

Voor vlakke constructies in evenwicht en voor ieder willekeurig geïsoleerd deel daarvan gelden in het algemeen drie onafhankelijke evenwichtsvergelijkingen ;bijv.: De som van de krachten in twee verschillende richtingen en de som van de momenten is nul of de som van de momenten t.o.v. twee verschillende punten en de som van de krachten in een bepaalde richting is nul.

Als we alle onbekende krachten kunnen oplossen door alleen gebruik te maken van de evenwichtsvergelijkingen, spreken we van **statisch bepaalde constructies**.

Voorbeeld 1.1 is hier een zeer eenvoudig voorbeeld van en bij voorbeeld 1.2 wordt getoond dat door handig snijden de constructie opgedeeld kan worden in geïsoleerde delen waarbij voor ieder deel apart de evenwichtsvergelijkingen worden opgesteld en door **handige keuzen** opgelost.

Handige keuzen zijn mogelijk m.b.t. de richtingen waarin het krachtenevenwicht wordt beschouwd of het punt ten opzichte waarvan het evenwicht van momenten wordt beschouwd. Hiervoor geldt in sterke mate: **oefening baart kunst** (sommige vergelijkingen leveren niets op).

Een constructie waarin het aantal onbekende krachten groter is dan het aantal (bruikbare) evenwichtsvergelijkingen noemen we **statisch onbepaald**. We kunnen de onbekende krachten dan alleen vinden door de deformaties in de beschouwingen te betrekken. (hoofdstuk 4)

De voorbeelden 1.3 en 1.4 zijn voor zelfstudie.

Het begrip spanning.

Let op :Er wordt hier drie keer over σ gesproken in drie verschillende betekenissen.

De **gemiddelde (normaal)spanning** σ in een staaf is gedefinieerd als

$$\sigma = \frac{\text{normaalkracht}}{\text{oppervlak van de dwarsdoorsnede}} \text{ zie figuur 1.13.}$$

De **(normaal)spanningsintensiteit** σ op een klein deeloppervlakje δA van de dwarsdoorsnede is gedefinieerd

$$\text{als } \sigma = \frac{\delta F}{\delta A} \text{ (dit begrip zullen we vrijwel nooit gebruiken).}$$

De lokale **(normaal)spanning** σ in een punt van de dwarsdoorsnede is $\sigma = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\delta F}{\delta A} \right)$.

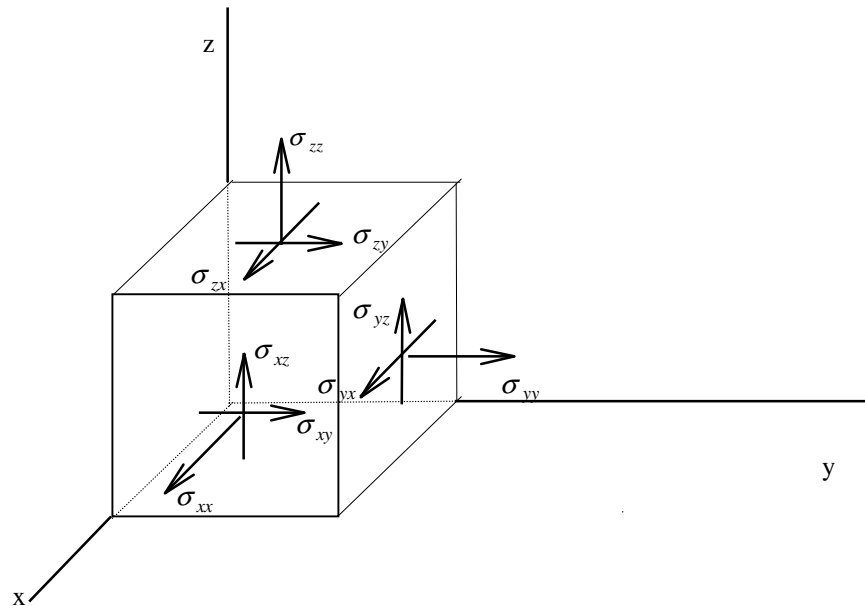
Als de (normaal)spanning in ieder punt van de dwarsdoorsnede overal gelijk is aan de gemiddelde (normaal)spanning dan spreken we van een **homogene (normaal)spanningsverdeling**.

Ook bij een trekstaaf is de (normaal)spanningsverdeling in het algemeen inhomogeen. Beschouw daarbij de krachtleiding op het uiteinde van de staaf. Op enige afstand vanaf het uiteinde is de (normaal)spanningsverdeling als homogeen te beschouwen (principe van De Saint Venant).

Dimensie van spanning in $[\text{N/m}^2]$ of Pa(scal). Vaak in MegaPascal MN/m^2 of MPa (10^6 Pa)

In een punt kunnen we 9 verschillende onafhankelijke spanningen definiëren.

In het algemeen kunnen we binnen een 3-D continuüm op een infinitesimaal klein rechthoekig blokje materiaal om een punt P 9 spanningen definiëren. Drie normaalspanningscomponenten σ_1, σ_2 en σ_3 (zie figuur 1.14) en 6 schuifspannings componenten $\tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{13}, \tau_{31}, \tau_{23}$ en τ_{32} . Hierbij is τ_{ij} met $i=1,2$ of 3 en $j=1,2$ of 3 in een x_1, x_2, x_3 assenstelsel de infinitesimale afschuifkracht F_S in de x_j richting gedeeld door het infinitesimaal kleine oppervlakje loodrecht op de x_i as.



We beperken ons m.b.t het begrip schuifspanning tot het concept **gemiddelde schuifspanning** τ , gedefinieerd als de totale afschuifkracht F_s gedeeld door het oppervlak waarop die werkt. (zie figuur 1.15).

Voor de lokale schuifspanning τ op een infinitesimaal klein vlakje in een punt geldt uiteraard weer

$\tau = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\delta F_s}{\delta A} \right)$. Een uitvoerige toelichting op het werken met de begrippen normaalspanning en schuifspanning is gegeven in voorbeeld 1.5 (zelfstudie).

Spanningsconcentraties. Rond gaatjes in staven, balken en platen, bij overgangen van dik naar dun in staven en balken en rond kerven in staven en balken zal de lokale spanning sterk afwijken van de (nominale) gemiddelde spanning. Er is een bepaalde verhouding tussen de maximale spanning σ_{\max} en de gemiddelde spanning σ_{gem} .

We spreken dan van een **spanningsconcentratiefactor** K gedefinieerd als $K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{gem}}}$. De grootten worden met

behulp van computerberekeningen (de Eindige Elementen Methode) bepaald en zijn voor een groot aantal gevallen in handboeken (o.a. Petersen) getabelleerd (zie figuren 1.20 en 1.21). Bijvoorbeeld: rond een gaatje in een relatief brede plaat geldt $K = 3$.

Ieder materiaal kent een maximaal mogelijke trekspanning, **treksterkte** genaamd.

Voor een constructie moet i.v.m. de veiligheid gelden dat in ieder punt de **toelaatbare spanning** kleiner is dan de treksterkte. De **veiligheidscoëfficiënt** is gedefinieerd als het quotiënt

$\frac{\text{uiterste belasting}}{\text{toelaatbare belasting}}$ en vaak als het quotiënt $\frac{\text{treksterkte}}{\text{toelaatbare spanning}}$ indien er een lineaire relatie tussen

belasting en spanning bestaat. De keuze van de grootte hiervan is van diverse factoren afhankelijk zie blz. 27.

Het begrip rek.

Het begrip rek wordt gebruikt om de (lokale) deformatie te quantificeren.

Er zijn vele mogelijke rekdefinities maar voorlopig beperken we ons tot gangbare definities.

zie hierbij figuur 1.22. (n.b. rekken zijn dimensieloze getallen)

Bij lineair elastisch materiaalgedrag wordt de **lineaire rek** definitie $e = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}$ gebruikt.

Deze rek wordt ook wel "**engineers strain**" genoemd. De deformaties of vervormingen zijn dan i.h.a. klein d.w.z. $e \ll 1$. Bij elastische deformatie van metalen geldt meestal $e < 0.001$ of $e < 0.1\%$.

Bij **rubberelasticiteit** waarbij grote rekken optreden wordt vaak gebruikt het begrip **verlengingfactor**

gedefinieerd als $\lambda = \frac{L}{L_0} = 1 + e$.

Bij plasticiteit (blijvende deformatie) wordt vaak het begrip **natuurlijke rek** gebruikt gedefinieerd als

$$\varepsilon = \sum \Delta\varepsilon = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = \ln(1 + e) = \ln \lambda.$$

Positieve spanning en rek horen bij trek, negatieve waarden horen bij compressie.

Voor de mate van afschuifdeformatie (zie figuur 1.23) introduceren we de **afschuifrek** gedefinieerd als $\gamma = \tan \varphi \approx \varphi$ bij kleine deformaties. (φ in radialen).

De trekproef.

In par. 1.4 staat de trekproef beschreven (zelfstudie). Enige belangrijke begrippen zijn:

Het **vloeipunt**; voorbij dit punt in het e - σ diagram kan blijvende vervorming van een proefstaaf geconstateerd worden na ontlasting.

De **vloeirek** respectievelijk **vloeispanning** zijn de waarden van rek en spanning bij het vloeipunt.

Bros (versus **taai**) materiaalgedrag: kleine (versus grote) plastische (blijvende) vervorming bij breuk.

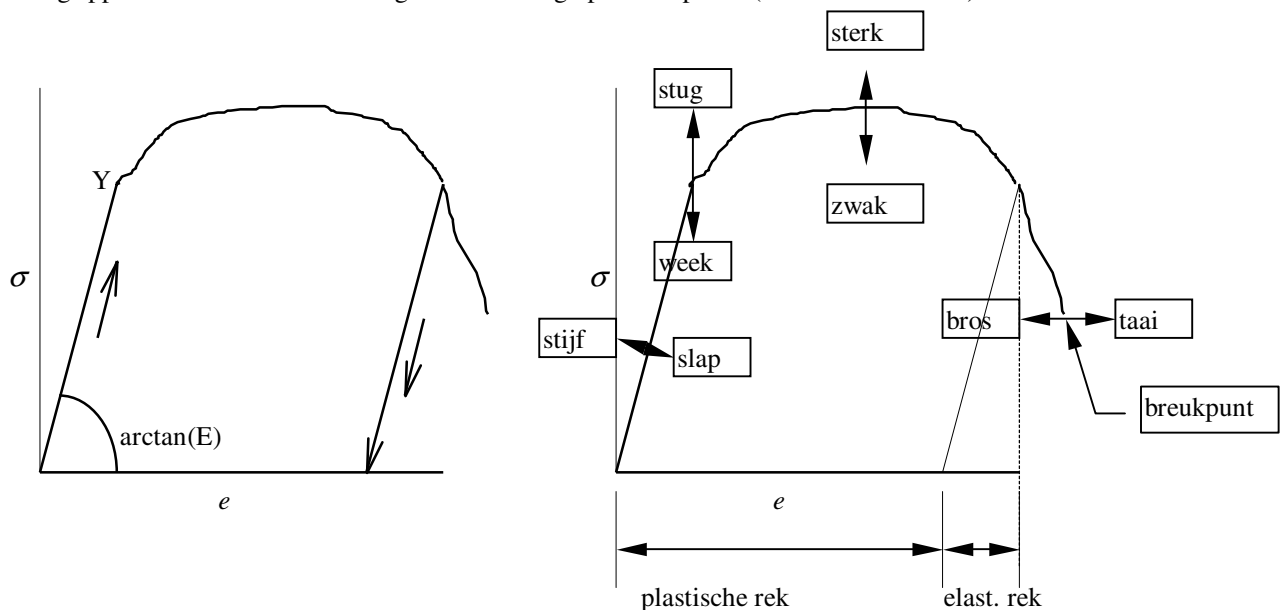
Sterk (versus **zwak**) materiaal: hoge (versus lage) treksterkte.

Stijf (versus **slap**) materiaal: een steile (versus vlakke) e - σ lijn in het elastische gebied.

De **materiaalstijfheid** wordt in dat lineaire gebied gekarakteriseerd door de Youngs-modulus of de elasticiteitsmodulus E , het quotiënt σ/e .

Stug (versus **week**) materiaal: hoge (versus lage) vloeispanning.

N.B. de begrippen **hard** en **zacht** hebben geen betrekking op de trekproef. (zie materiaalkunde).



De benodigde vergelijkingen voor de oplossing van een statica probleem.

De benodigde vergelijkingen voor het oplossen van statische problemen in de mechanica voor deformeerbare lichamen worden geleverd door 3 soorten relaties.

1. **Evenwicht van krachten en momenten.**
2. **De aansluiting van vervormingen (ook compatibiliteit van de rekken genaamd):** de relaties tussen rekken en verplaatsingen.
3. **De spanning-rek relatie van de materialen.** Ook wel constitutief gedrag genoemd.

Als vierde soort zouden nog de **geometrische relaties** genoemd kunnen worden maar die zijn triviaal.

Voor **statisch bepaalde problemen** zijn de relaties van de tweede en derde soort niet nodig.

Opdrachten voor de eerste week:

Bestudeer aandachtig de voorbeelden 1.1 t/m 1.5

Oefenopgaven voor thuis: 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 1.10, 1.12, 1.14, 1.16, 1.18, 1.20, 1.22

2 Statisch bepaalde Systemen; College en opdrachten in de tweede week.

Vakwerken

Staven kunnen geen moment overdragen op een ander lichaam, omdat ze per definitie aan weerszijden begrensd worden door scharnieren.

Een 2-dimensionale (we beperken ons in eerste instantie tot 2-D staafconstructies) **staafconstructie** of **stavenvakwerk** (vaak kortweg **vakwerk** genaamd) wordt daarom in het boek een **pin-jointed constructie** genoemd. Een pin-joint is een lijnscharnier en dat kan geen moment overdragen. **Staven kunnen dus alleen maar normaalkrachten doorleiden.** De verbindingen van de staven hoeven er in werkelijkheid helemaal niet uit te zien als lijnscharnieren om ze als zodanig te modelleren. De modellering als staafconstructie is een benadering van de werkelijkheid. Op blz. 41 t/m 45 kunt u iets lezen over de uitvoeringsvormen van staafverbindingen die gewoonlijk als lijnscharnieren worden gemodelleerd.

Een **knooppunt** in een staafconstructie is een punt waar een of meerdere staafeinden samenkomen.

Zo'n knooppunt is, als het geïsoleerd wordt van de omgeving, altijd in evenwicht, d.w.z. de som van de krachten op een knooppunt is altijd nul. Toepassing hiervan op alle knooppunten van een vakwerk en tevens de derde wet van Newton, actie is reactie, voor de overgang van het ene naar het andere knooppunt via de tussenliggende staven noemen we de **knooppuntsmethode** voor het bepalen van staafkrachten.

Bij **statisch bepaalde constructies** kunnen de staafkrachten en reactiekrachten bepaald worden uit het globale evenwicht van de constructie en het evenwicht van de geïsoleerde knooppunten (zie voorbeelden 2.1 en 2.2) of het evenwicht van afgesneden delen van de constructie (zie voorbeeld 2.4). Dit laatste heet de **snedemethode**.

Beschouw een vakwerk met N_j knooppunten N_m staven en N_r onbekende reactiekrachten. In een knooppunt (met index i) komen een aantal staven bijeen met nummers m met $1 \leq m \leq N_m$.

De staaf met nummer m maakt daarbij een hoek θ_m met de positieve x -as van een vast x - y assenstelsel. In knooppunt i werken de externe krachten $F_x^{(i)}$ en $F_y^{(i)}$ en/of de reactiekrachten $R_x^{(i)}$ en $R_y^{(i)}$ (uiteraard alleen bij een ondersteuningsknooppunt zie fig. 2.20). De trekkracht in de staaf met nummer m is T_m . Alle N_j

knooppunten leveren dan twee twee evenwichtvergelijkingen:

$$\sum T_m \cos \theta_m + R_x^{(i)} = -F_x^{(i)} \quad \text{en} \quad \sum T_m \sin \theta_m + R_y^{(i)} = -F_y^{(i)}$$

In het linkerlid van deze vergelijkingen staan de onbekenden en de rechterleden zijn bekend.

Er staan dan $2N_j$ onafhankelijke vergelijkingen ter beschikking en er zijn $N_m + N_r$ onbekenden.

Als alle staafkrachten van een vakwerk te bepalen zijn uit de evenwichtsvergelijkingen dan spreken we van een **statisch bepaald vakwerk**.

Het vakwerk is dan statisch bepaald als geldt: $N_m + N_r = 2N_j$

Het vakwerk is statisch onbepaald als geldt: $N_m + N_r > 2N_j$

We hebben te maken met een mechanisme als geldt: $N_m + N_r < 2N_j$

Beschouw voorbeeld 2.3. Let op: deze relaties moeten ook gelden voor willekeurige delen van de constructie.

Paragraaf 2.1.3.; Software voor vakwerken, behoort niet tot de tentamenstof.

In plaats hiervan wordt een demonstratie gegeven van het oplossen van vakwerkproblemen met behulp van het softwarepakket MARC/MENTAT. Aan het werken hiermee is ook nog een aparte training gewijd. Op het tentamen wordt vanaf dit jaar getoetst of u het werken met MARC/MENTAT beheerst. In het programma worden de bovenstaande $2N_j$ lineaire vergelijkingen opgelost, en daarmee zijn dan ook alle staafkrachten en reactiekrachten bekend. In werkelijkheid worden de krachten eerst uitgedrukt in de spanningen, de spanningen in de rekken en de rekken weer in de $2N_j$ knooppuntsverplaatsingen van de staafelementen. Oplossen van de $2N_j$ vergelijkingen levert dan dus eerst de $2N_j$ knooppuntsverplaatsingen. Uit de $2N_j$ knooppuntsverplaatsing volgen weer de rekken, de spanningen en de staafkrachten en reactiekrachten. Er is dan behalve van evenwicht ook gebruik gemaakt van de compatibiliteit van de rekken van de staven. Dat levert de extra vergelijkingen op die oplossingen voor statisch onbepaalde constructies ook mogelijk maken.

Bij dezelfde externe belasting kan een onvoldoende vastgemaakte constructie verschillende standen in de ruimte hebben en een mechanisme kan dan verschillende configuraties innemen. Als er dus nog zogenaamde beweging als star lichaam mogelijk is, of als de constructie een mechanisme blijkt te zijn, dan zijn de $2N_j$ vergelijkingen niet onafhankelijk en kan er dus ook geen eenduidige oplossing gevonden worden.

Het programma levert dan de cryptische foutmelding 2004 (singuliere matrix) in plaats van 3004 welk laatste getal een valide modellering betekent. Het programma MENTAT is eigenlijk een grafische interface waarmee de geometrie en de materiaalparameters van de constructie worden ingevoerd. De karakteristieken van de constructie worden dan naar keuze vastgelegd in een binaire (niet leesbare relatief kleine) modelfile *naam.mud*, en/of in een (leesbare maar relatief grote) modelfile *naam.mfd* ASCII file. MENTAT levert ook een *naam.dat* file die als invoerfile dient voor het programma MARC dat het lineaire stelsel vergelijkingen opstelt en oplost. De resultaten worden dan in een leesbare file *naam.out* weggeschreven. Ook wordt een naar keuze binaire file *naam.t16* en/of leesbare *naam.t19* ASCII file geschreven die als invoerfile dienst doen voor MENTAT om de resultaten grafisch zichtbaar te maken. MENTAT heet daarom een pre-en postprocessor. In plaats van MENTAT kunnen in principe ook andere zogenaamde pre-en postprocessors gebruikt worden.

De genoemde "handmethoden" de knooppunts- en snedemethoden blijven van belang om twee redenen.

Niet ieder bedrijf heeft zo'n EEM programma. Dat kost een bedrijf soms tienduizenden Euro's per jaar.

Op de tweede plaats kan er vooral bij grote constructies gemakkelijk een fout gemaakt worden bij het invoeren van de coördinaten en materiaalparameters. Enige handcontrole van het evenwicht bij de knooppunten met externe belasting en midden in de constructie blijft nodig om te controleren of met de juiste invoer is gewerkt.

2.2 Uniform belaste dunne schalen.

2.2.1 Dunwandige cilinder.

Beschouw een lange cilinder met cirkelvormige dwarsdoorsnede, straal R_i en constante dikte t waarbinnen een hydrostatische druk p heerst. (De meter geeft voor de buitendruk 0 aan, dus p is een overdruk.)

Verder geldt $t \ll R_i$ lees $t < 0,1 R_i$ (zie figuur 2.32). We leggen de as in een horizontaal vlak.

We introduceren nu een rechthoekig r, θ, z assenstelsel met z de axiale coördinaat, θ de tangentiële coördinaat en r de radiale coördinaat. We maken vervolgens een axiale snede en een transversale snede (loodrecht op de as) door de cilinder. We onderscheiden nu een axiale normaalspanning σ_z op de transversale snede en een tangentiële normaalspanning (hoopstress) σ_θ op de axiale snede (deze worden ook wel de membraan spanningen genoemd). Vanwege symmetrie overwegingen zijn er geen schuifspanningen.

De verticale kracht die wegens de inwendige druk op een stukje van de halve cilinder met lengte δz (zie fig.

$$2.33, 2.34 \text{ en } 2.35) \text{ wordt uitgeoefend is: } \int_0^\pi p R_i d\theta \sin \theta \delta z = p R_i \delta z \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2 p R_i \delta z$$

Wegens vertikaal evenwicht van dit stukje cilinder geldt : $2 \sigma_\theta t \delta z = 2 p R_i \delta z$

Dus voor de tangentiële normaalspanning geldt: $\sigma_\theta = \frac{p R_i}{t}$

De axiale normaalspanning σ_z hangt van de **randvoorwaarden (constraints)**. Als de cilinder **gesloten einden** heeft (zie fig. 2.36) dan geldt voor het axiale evenwicht van een halve cilinder:

$$p \pi R_i^2 = \sigma_z \pi (R_0^2 - R_i^2) = \sigma_z (R_0 - R_i) (R_0 + R_i) = 2 \sigma_z \pi t R_m$$

De axiale spanning is dan $\sigma_z = \frac{p R_i^2}{2 t R_m}$ met $R_m = \frac{R_0 + R_i}{2}$. En omdat $R_m \approx R_i$: $\sigma_z \approx \frac{p R_i}{2 t}$

Bij **open einden** (zie fig. 2.38) werkt de druk in axiaal richting niet op de cilinder en dan geldt $\sigma_z = 0$.

Voor de radiale spanning σ_r geldt: $-p \leq \sigma_r \leq 0$ en omdat $|\sigma_r| \ll |\sigma_z|$ en $|\sigma_r| \ll |\sigma_\theta|$ wordt σ_r verwaarloosd.

2.2.2 Dunwandige bol onder druk.

Beschouw een dunwandige bol met straal R_i en dikte t met $t \ll R_i$ en inwendige druk p .

Maak een horizontale snede door het middelpunt van de bol en beschouw de bovenste helft van de bol.

Introduceer de membraanspanning σ_c (zie fig. 2.40), en beschouw het verticale evenwicht van de halve bol.

We kunnen dan schrijven $p \pi R_i^2 = 2 \sigma_c \pi t R_m$ met $R_m = R_i + \frac{t}{2}$

De membraanspanning σ_c is dan dus $\sigma_c = \frac{p R_i^2}{2 t R_m}$ en bij benadering $\sigma_c = \frac{p R_i}{2 t}$

Paragraaf 2.2.3 en 2.3 behoren niet tot de tentamenstof.

Opdrachten voor de tweede week:

Bestudeer aandachtig de voorbeelden 2.1 t/m 2.4, 2.7 en 2.9. Doe de voorbeelden 2.1 en 2.2 met MARC.

Oefenopgaven : 2.1, 2.3, 2.4 en 2.5 analytisch en met MARC, 2.7, 2.15 t/m 2.20, 2.31 en 2.33.

3 Relaties tussen spanning en rek. College en opdrachten in de derde week.

Rek-spanningsrelaties worden ook wel **constitutieve relaties** genoemd.

We beschouwen een infinitesimaal klein rechthoekig blokje materiaal uit een belaste constructie, met ribben evenwijdig aan het cartesische x, y, z assenstelsel. We beschouwen vervolgens een **drie-assige** (triaxiale) **spanningstoestand** met normaalspanningen σ_x, σ_y en σ_z op de zijvlakken (zie fig. 3.1). Als geldt $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_H$ dan spreken we van een **hydrostatische spanningstoestand**. Als σ_H negatief is, zoals meestal bij vloeistoffen het geval is, dan spreken we van hydrostatische druk. Neem aan dat de lengten van de ribben in onbelaste toestand L_x, L_y en L_z zijn. Met de hydrostatische spanningstoestand zijn dan drie rekken

$$e_x = \frac{\Delta L_x}{L_x}, e_y = \frac{\Delta L_y}{L_y}, e_z = \frac{\Delta L_z}{L_z} \text{ geassocieerd.}$$

Het gedeformeerde volume is dan $V = (L_x + \Delta L_x)(L_y + \Delta L_y)(L_z + \Delta L_z) = L_x L_y L_z (1 + e_x)(1 + e_y)(1 + e_z)$

We definiëren nu een **volumerek of dilatatie**

$$e_{vol} = \frac{V - V_0}{V_0} = (1 + e_x)(1 + e_y)(1 + e_z) - 1 = e_x + e_y + e_z + e_x e_y + e_y e_z + e_z e_x + e_x e_y e_z.$$

Als nu $e_x \ll 1$, $e_y \ll 1$ en $e_z \ll 1$ dan geldt $e_{vol} = e_x + e_y + e_z$.

Voor een **isotroop** materiaal, waarvan de eigenschappen in alle richtingen identiek zijn, geldt tevens

$$e_x = e_y = e_z = \frac{e_{vol}}{3}.$$

Veel materialen zoals hout, gewapend beton en vezelversterkte kunststoffen zijn **anisotroop**, d.w.z. de eigenschappen zijn in verschillende richtingen anders. De relatie tussen σ_H en e_{vol} is voor de meeste materialen lineair (zie fig. 3.3).

De wet van Hooke.

Voor een zeer groot aantal materialen geldt bij een eenassige trekproef tot een bepaalde grens aan de trekspanning een lineair verband tussen de trekspanning en de rek. Dit wordt weergegeven door de relatie $\sigma = Ee$. Hierin is de constante E de elasticiteitsmodulus (van Young). Dit is de zogenaamde **wet van Hooke**.

We beschouwen nu een rechthoekige balk met initiële lengte L_0 , initiële dikte d_0 en initiële breedte b_0 waarop een uniaxiale spanning σ in de lengterichting werkt zoals in fig. 3.4 is weergegeven. De afmetingen onder belasting zijn dan $L_0 + \Delta L$, $d_0 - \Delta d$ en $b_0 - \Delta b$. We definiëren dan de de axiale rek als $e_L = \frac{\Delta L}{L_0}$, de rek in

de diepterichting als $e_d = -\frac{\Delta d}{d_0}$ en de rek in de breedterichting als $e_b = -\frac{\Delta b}{b_0}$. Uit experimenten blijkt nu dat

bij lineair elastisch materiaalgedrag geldt $e_d = e_b = -\nu e_L$. De parameter ν is een materiaalconstante en wordt de **dwars-contractiecoëfficiënt of Poissons ratio** genoemd. De waarde van ν ligt tussen 0 en 0.5. Voor de meeste metalen geldt $\nu = 0.3$ en voor rubberachtige materialen ligt de waarde van ν dicht in de buurt van 0.5. Bij de triaxiale spanningstoestand zoals weergegeven in fig. 3.1 is een triaxiale rektoestand geassocieerd met:

$$e_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad e_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \quad e_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Deze rektoestand wordt verkregen door optellen of **superpositie**.

Het algemene **superpositiebeginsel** zegt: **het totale effect van een combinatie van belastingen is de optelsom is van de effecten van ieder van de belastingen apart**. Dit beginsel is toelaatbaar bij een lineair verband tussen spanningen en rekken, en als de afzonderlijke rekken bij de afzonderlijke belastingen klein zijn.

Voor **afschuifbelasting** in het lineair elastische gebied geldt de **wet van Hooke voor afschuiving**: $\tau = G\gamma$.

De constante G wordt de **glijdingsmodulus** genoemd. De afschuifrek in een bepaalde richting wordt niet beïnvloed door afschuifbelastingen in richtingen loodrecht daarop.

Bij hydrostatische belasting geldt eveneens een lineaire relatie tussen de hydrostatische spanning en de volumerek. Er geldt $\sigma_H = Ke_{vol}$. Hierin wordt K de **bulkmodulus** genoemd.

Eenvoudig is bij een triaxiale spanningstoestand met normaalspanningen σ_x, σ_y en σ_z uit bovengenoemde

relaties af te leiden $e_{vol} = e_x + e_y + e_z = \frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$. Bij een hydrostatische spanningstoestand is

$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_H$ dus dan geldt: $e_{vol} = \frac{\sigma_H}{K} = \frac{(1-2\nu)}{E}3\sigma_H$ en daaruit volgt dan $E = 3K(1-2\nu)$.

We zien dus dat een waarde van 0.5 voor ν betekent dat het materiaal dan incompressibel is.

In hoofdstuk 9 wordt aangetoond dat ook de glijdingsmodulus G uit te drukken is in de twee materiaalparameters E en ν volgens $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Voor reële materialen zijn E , K en G altijd positief en

daaruit volgt dan $-1 \leq \nu \leq 0.5$ maar in de praktijk geldt voor reële materialen: $0 \leq \nu \leq 0.5$.

Thermische rekken.

Temperatuursveranderingen veroorzaken ook rekken.

Zoals bekend geldt voor een grote klasse van materialen bij een lichaam dat vrij is om te expanderen: $e_x = \alpha\Delta T$, $e_y = \alpha\Delta T$ en $e_z = \alpha\Delta T$. Hierin is ΔT de temperatuurstoename van het lichaam en de parameter α heet de lineaire uitzettingscoëfficiënt waarvoor geldt $\alpha \geq 0$. De grootte van α is in het algemeen afhankelijk van de temperatuur maar kan vaak in bepaalde temperatuurstrajecten constant verondersteld worden. Voor de volumerek van het materiaal geldt dan $e_{vol} = \beta\Delta T = e_x + e_y + e_z = 3\alpha\Delta T \Rightarrow \beta = 3\alpha$.

Bij niet verhinderde thermische expansie geldt dan ook:

$$e_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha\Delta T \quad e_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha\Delta T \quad e_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha\Delta T$$

De afschuifrekken worden niet door de temperatuur beïnvloed.

Paragraaf 3.3 is behalve onderstaande volzinnen geen tentamenstof. Anderssoortige dan elastische constitutieve verbanden worden uitvoerig behandeld in latere mechanicavakken, en met name in het 3^e trimestervak "Analyse van continua".

Hier wordt volstaan met een paar opmerkingen. In het algemeen is materiaalgedrag tijdsafhankelijk, en we spreken dan van viscoëlastisch, viscoplastisch of viscoëlasto-plastisch materiaalgedrag. Bij blijvende vervorming na het wegnemen van de belasting spreken we van plastisch materiaalgedrag.

Deformaties van statisch bepaalde systemen.

Bij een **Statisch bepaald vakwerk** geldt voor iedere staaf bij isotherme belasting **de rek-spanning relatie**:

$$e = \frac{\sigma}{E} = \frac{T}{AE} \Rightarrow \Delta L = eL = \frac{TL}{AE}. \text{ Hierin is } T \text{ de staafkracht. Als de rekken allen klein zijn mogen we bij}$$

benadering voor ieder knooppunt het **evenwicht** beschouwen **in de onvervormde toestand**. Hieruit zijn dan alle staafkrachten te bepalen. Om nu de verplaatsing van een knooppunt te kunnen bepalen, is tevens **aansluiting (compatibiliteit) van de rekken** vereist. De werkwijze hiervoor is heel simpel, en is toegelicht aan de hand van het voorbeeld in fig. 3.12, en exact uitgewerkt in fig. 3.13a. en vervolgens benaderd uitgewerkt in fig. 3.13b. De toelaatbaarheid van de benaderende werkwijze voor kleine rekken wordt op blz. 123 en 124 aannemelijk gemaakt aan de hand van bovengenoemd voorbeeld. Voor de bepaling van de gedeformeerde toestand van een constructie met meerdere staven wordt de Eindige Elementen Methode gebruikt (Hoofdstuk 4).

Paragrafen 3.4.2 en 3.4.3 zijn geen tentamenstof.

Opdrachten voor de derde week:

Bestudeer aandachtig de voorbeelden 3.1 t/m 3.8

Oefenopgaven : 3.1, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.10, 3.11, 3.12, 3.14, 3.19.

4 Statisch onbepaalde systemen. College en opdrachten in de vierde week

Werkwijze van de eindige elementenmethode voor statisch bepaalde en onbepaalde vakwerken.

Ieder knooppunt van een vakwerk heeft 3 onderling loodrechte verplaatsingscomponenten en drie onderling loodrechte uitwendige krachtscomponenten die al dan niet bekend zijn. We kunnen de rekken van alle staven in de knooppuntsverplaatsingen uitdrukken. Via de wet van Hooke kunnen we dan ook de spanningen in die staven en dus ook alle knooppuntskrachten uitdrukken in de al dan niet bekende verplaatsingen. Als we dan alle evenwichtsvergelijkingen voor de knooppunten opschrijven dan krijgen we samen met de kinematische randvoorwaarden (de voorgeschreven verplaatsingen) en de dynamische randvoorwaarden (de voorgeschreven krachten) een lineair stelsel vergelijkingen in de onbekende knooppuntsverplaatsingen en de onbekende reactiekrachten. Als de beweging als star lichaam door voldoende kinematische randvoorwaarden is onderdrukt dan is dit stelsel regulier en kan dit stelsel via een computerprogramma worden opgelost. Bij onvoldoende onderdrukking van de beweging als star lichaam, of bijvoorbeeld de afwezigheid van stijfheid van staven (waardoor de constructie een mechanisme kan worden) dan wordt dit stelsel singulier en dan kan er geen oplossing gevonden worden. In Marc wordt dan de foutmelding met nummer 2004 gegeven.

Als het programma de knooppuntsverplaatsingen heeft uitgerekend en opgeslagen dan kunnen daaruit eenvoudig de rekken, spanningen en knooppuntskrachten berekend worden. Hoe een en ander precies in zijn werk gaat wordt in het tweedejaars vak Eindige Elementenmethode uit de doeken gedaan.

De wiskundige uitwerking uit paragraaf 4.1 vanaf formule 4.1 is geen tentamenstof.

Aan de hand van voorbeeld 4.1 wordt de boven beschreven werkwijze voor het opstellen van dit stelsel nader toegelicht. Dit is voor zelfstudie.

4.2 Statisch onbepaalde systemen

4.2.1 Enkel typische voorbeelden.

Bij statisch onbepaalde constructies worden eerst de krachten (eventueel via rek-verplaatsingsrelaties en spanning-rek relaties) in de onbekende verplaatsingen uitgedrukt. Pas daarna worden de evenwichtsvergelijkingen toegepast.

Dan kunnen we daarmee de onbekende verplaatsingen uitrekenen. Vervolgens worden weer de rekken, spanningen en krachten berekend.

Bij een **parallelschakeling van n elastische elementen** met stijfheden k_i met $i = 1, 2, \dots, n$ geldt voor de

stijfheid k van het geheel: $k = \sum_{i=1}^n k_i$.

Bij een **serieschakeling van n elastische elementen** met stijfheden k_i met $i = 1, 2, \dots, n$ kunnen we beter

denken in termen van flexibiliteiten f_i (ook wel inverse stijfheden of soepelheden genoemd) met $f_i = \frac{1}{k_i}$. En er

geldt dan: $f = \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^n f_i$.

zie voorbeelden 4.4 t/m 4.7

Paragraaf 4.2.2 en 4.2.3 zijn geen tentamenstof

Opdrachten voor de vierde week:

Bestudeer aandachtig de voorbeelden 4.1, 4.4 t/m 4.7

Oefenopgaven voor thuis: 1.4 en een variant daarvan waarbij de kracht van 10 kN horizontaal gericht is (neem aan dat het Oppervlak A en de Elasticiteitsmodulus E voor de 3 staven identiek is).

4.23 t/m 4.28, 4.32.

5.1 en 5.2 Buiging van balken, momenten en krachten.

College en opdrachten in de vijfde week.

Een **balk** wordt hier gedefinieerd als een **constructieonderdeel** waarvan het oppervlak van de dwarsdoorsnede klein is in vergelijking met zijn lengte en dat loodrecht op zijn lengterichting wordt belast. In dit hoofdstuk wordt de axiale belasting in eerste instantie geheel buiten beschouwing gelaten. Een balk heeft weerstand tegen buiging en we spreken daarom wel van de **balkbuigingstheorie** die een relatie legt tussen de belasting en de vervorming van balken. Er zijn diverse balkbuigingstheorieën maar wij bespreken slechts de meest gangbare en tevens eenvoudigste. De verschijningsvorm van wat als balk gemodelleerd kan worden is divers en in par. 5.1 staan een aantal voorbeelden. We beperken ons in eerste instantie tot 2-D balken d.w.z. de belastingskrachten liggen allen in hetzelfde vlak. In par. 5.2 staan de typen ondersteuning weergegeven.

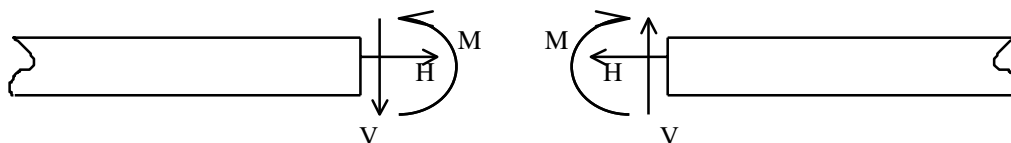
We onderscheiden:

1. **Scharnieren** (fig. 5.6a): er werken ter plaatse van een scharnier twee onderling loodrechte reactiekrachten in het vlak van de constructie en de belasting, de hoekverdraaiing is daar vrij.
2. **Rolopleggingen** (fig. 5.6b): er werkt ter plaatse van een roloplegging maar één reactiekracht in het vlak van de constructie en de belasting, de hoekverdraaiing is daar vrij en ter plaatse is vrije translatie in een richting loodrecht op die reactiekracht mogelijk.
3. **Inklemmingen** (fig. 5.8): er werken ter plaatse twee onderling loodrechte reactiekrachten en een reactiemoment in het vlak van de constructie en de belasting, en de verplaatsing en hoekverdraaiing zijn daar onderdrukt. Een "**Cantilever beam**" is een aan één zijde ingeklemde balk die aan het andere uiteinde vrij is. Aangezien we bij een 2-D constructie maar 3 evenwichtsvergelijkingen ter beschikking hebben is een balk **statisch onbepaald als het aantal reactiekrachten en momenten groter is dan drie** (en als we de axiale belasting niet meenemen als dit aantal groter is dan twee).

In fig. 5.11 staan de typen belasting van een balk weergegeven:

1. Niet uniform verdeelde belasting loodrecht op de balk (fig. 5.10a).
2. Uniform verdeelde belasting loodrecht op de balk (fig. 5.10b).
3. Puntkrachten; Idealisaties van niet uniform verdeelde belastingen over een korte lengte (fig. 5.11a).
4. Niet uniform verdeelde belasting over een korte lengte; Meestal gemodelleerd als een puntkracht plus een geconcentreerd koppel (formules 5.2 en 5.3) waarbij dit laatste meestal verwaarloosd wordt.
5. Een koppel; meestal veroorzaakt door twee vlak bij elkaar gelegen tegengesteld gerichte niet uniform verdeelde belastingen loodrecht op de balk (zie fig. 5.12).

We introduceren het begrip **snedegrootheden**. Dit zijn de krachten en momenten die heersen op de snedeoppervlakken bij een denkbeeldige snede door een balk. Deze snedegrootheden zijn links en rechts van de snede wegens "**actie is reactie**" tegengesteld gericht. We onderscheiden 3 snedegrootheden: de **dwarskracht** V , het **buigend moment** M en de **normaalkracht** H (die we verderop aanvankelijk even buiten beschouwing laten). Gedefinieerd aan de hand van de volgende afspraken.: zie ook fig. 5.13. **N.b. andere boeken kunnen andere afspraken hanteren.**



Met de evenwichtsvergelijkingen toegepast op een deel van de balk kunnen de snedegrootheden bij statisch bepaalde balken eenvoudig bepaald worden (zie blz. 202). Zie voorbeelden 5.1 t/m 5.3.

Relaties tussen de verdeelde belasting, de dwarskracht en het buigend moment.

Vertikaal evenwicht van een infinitesimaal klein stukje δx van een balk waarop een niet uniforme verdeelde belasting $w(x)$ werkt (fig. 5.24), levert: $V - (V + \delta V) - w\delta x = 0 \Rightarrow \frac{\delta V}{\delta x} = -w$ en als $\delta x \rightarrow 0$ dan volgt de

differentiaalvergelijking(DV):

$$\boxed{\frac{dV}{dx} = -w(x)}$$

Beschouwing van het **momentenevenwicht** hiervan om het meest rechts gelegen punt Q levert:

$$M - (M + \delta M) + V\delta x - \frac{w(\delta x)^2}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\delta M}{\delta x} = V - \frac{w\delta x}{2} \text{ en daaruit volgt als } \delta x \rightarrow 0 \text{ de DV:}$$

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = V(x)}$$

Uit de eerste DV kunnen de dwarskrachten verkregen worden door integratie van de verdeelde belasting over gebieden waar geen discontinuïteiten in de dwarskracht zijn (veroorzaakt door uitwendige transversale puntkrachten) en uit de tweede DV kunnen de momenten verkregen worden door integratie van de dwarskracht over een gebied waarin geen discontinuïteiten in het buigend moment zijn (veroorzaakt door uitwendige koppels).

De te volgen werkwijze met handberekeningen berust nu op het volgende besef:

- In een gebied met alleen een n^{de} graads verdeelde belasting is de dwarskracht van de graad $n+1$ en het buigend moment van de graad $n+2$. In een gebied van de balk waar geen externe belasting werkt is de dwarskracht dus constant en het buigend moment lineair. In een gebied met alleen een uniforme verdeelde belasting is de dwarskracht dus lineair en het buigend moment kwadratisch.
- Een externe laterale kracht veroorzaakt een discontinuïteit in de dwarskracht en een extern koppel veroorzaakt een discontinuïteit in het buigend moment.

Oplossingsstrategie bij statisch bepaalde balken.

1. Bepaal de inklemreacties met behulp van de drie evenwichtsvergelijkingen en daaruit de dwarskrachten en momenten net voor en na de oplegpunten.
2. Bepaal de dwarskrachten en buigende momenten juist voor en achter de plaatsen waar de externe krachten en koppels werken. Dit gebeurt ook door toepassing van de evenwichtsvergelijkingen.
3. Bepaal de punten waar de dwarskracht nul is, dit zijn de punten waar de buigende momenten een lokaal minimum of maximum hebben.
4. Bepaal eventueel op nog een aantal tussenpunten de dwarskracht en het buigend moment.
5. Teken de dwarskrachten- en momentenlijnen.

In de voorbeelden 5.4 t/m 5.8 is dit proces een aantal keren gedemonstreerd.

Computermethode.

Net zoals bij staven kunnen de berekeningen aan balkconstructies volledig geautomatiseerd worden.

Het eindige elementenmethode pakket Marc is een voorbeeld van een programma dat u op uw notebook kunt gebruiken voor berekeningen aan balkconstructies.

De globale werkwijze in het 3-D Marc programma wordt hier beschreven. De constructie bestaat uit balkelementen met knooppunten die al dan niet aan elkaar en aan de vaste wereld zijn verbonden. Ieder element-knooppunt heeft 6 al dan niet bekende uitwendige krachtgrootheden (3 onderling loodrechte krachten en 3 onderling loodrechte koppels). Via het evenwicht van alle constructie-knooppunten verkrijgen we na verdiscontering van de dynamische randvoorwaarden een stelsel lineaire vergelijkingen in de onbekende element knooppuntskrachten en de onbekende uitwendige reactiekrachten en reactiemomenten. Dit stelsel is bij voldoende gespecificeerde stijfheid en kinematische randvoorwaarden regulier en wordt dan opgelost.

Aan het einde van hoofdstuk 5 en in hoofdstuk 6 komen we hierop terug.

We moeten hiervoor eerst nog wat karakteristieken van een balk definiëren in het volgende hoofdstuk.

De numerieke uitwerking hiervan in Paragraaf 5.2.3 vanaf de tweede alinea van blz. 234 is geen tentamenstof.

Opdrachten voor de vijfde week:

Bestudeer aandachtig de voorbeelden 5.1 t/m 5.8

Oefenopgaven: 5.2, 5.4, 5.6, 5.8, 5.10, 5.12, 5.14, 5.16

(naar eigen keuze 5.1, 5.3, 5.5, 5.7, 5.9, 5.11, 5.13, 5.15, 5.27)

5.3 en 5.4 Buiging van balken, Spanningen. College en opdrachten in de zesde week.

Normaalspanningen.

We starten met **zuivere buiging** d.w.z. een toestand met een constant moment over tenminste het beschouwde deel van de balk. Ter plaatse is dan de dwarskracht dus nul. Beschouw zo'n stukje balk en voorzie het in gedachten van een lijnenrooster zoals in fig 5.50 weergegeven. We veronderstellen dat in lengterichting **oorspronkelijk rechte lijnen vervormen tot cirkelbogen**. Bij een positief buigend moment worden de axiale roosterlijnen aan de bovenkant korter en aan de onderkant langer.

Op een bepaalde hoogte in de balk zullen de axiale roosterlijnen even lang blijven. De lijn die even lang blijft noemen we de **neutrale lijn**. In het zgn. **neutrale (gekromde) vlak** door deze lijn zijn er bij zuivere buiging dus geen vervormingen in axiale richting.

We beperken ons in eerste instantie tot buiging om de z-as en dwarsdoorsneden die symmetrisch zijn t.o.v. de y-as.

Veronderstellingen bij deze balkbuigtheorie:

1. Vlakke doorsneden blijven vlak (zie fig. 5.51a).
2. De longitudinale lijnen (in x richting) buigen tot cirkelbogen met hetzelfde middelpunt (fig 5.51b).
3. De spanningen σ_y en σ_z in de y- en z richtingen loodrecht op de x richting zijn verwaarloosbaar.
- 4 De kromtestraal van de roosterlijnen is groot vergeleken bij de hoogteafmetingen van de balk.
d.w.z. we beschouwen alleen relatief kleine krommingen).
5. Het materiaal gedraagt zich lineair elastisch.
6. De elasticiteitsmodulus is voor trek en druk hetzelfde en onafhankelijk van de plaats in de balk.

Intermezzo: de ligging van het zwaartepunt van de dwarsdoorsnede.

Als we de ligging van de oorsprong van het orthogonale x', y', z' assenstelsel (met de x' -as in axiale tichting) in een willekeurig punt van het vlak van de dwarsdoorsnede leggen, dan is de ligging van het zwaartepunt van een dwarsdoorsnede (y'_c, z'_c) in het $y' - z'$ vlak als volgt gedefinieerd:

$$y'_c = \frac{Q_{z'}}{A} \quad \text{en} \quad z'_c = \frac{Q_{y'}}{A} \quad \text{met} \quad Q_{z'} = \int_A y' dA \quad \text{en} \quad Q_{y'} = \int_A z' dA$$

$Q_{z'}$ en $Q_{y'}$ noemen we de **lineaire oppervlakte momenten** van de dwarsdoorsnede t.o.v. de z' respectievelijk de y' as.

Bestudeer een gedetailleerde beschouwing hierover in Appendix C

Intermezzo over de definitie van het kwadratisch oppervlaktemoment $I_{z'}$ t.o.v. een z' -as.

Omdat alleen buiging om een as evenwijdig aan de z-as wordt beschouwd, korten we $I_{z'}$ af tot I' .

(Bij buiging om de y' -as wordt uiteraard volkomen analoog een grootheid $I_{y'}$ ingevoerd)

We definiëren het kwadratisch oppervlaktemoment t.o.v. de z' -as als: $I' = \int_A y'^2 dA = \int_A y'^2 b(y') dy'$.

I' wordt ook wel het **oppervlaktetraagheidsmoment t.o.v. de z' -as** genoemd.

We voeren ook een t.o.v. het x', y', z' assenstelsel getransleerd x, y, z assenstelsel in met de oorsprong in het zwaartepunt van de dwarsdoorsnede met coördinaten (y'_c, z'_c).

We kunnen dan voor I' ook schrijven $I' = \int_A (y'_c + y)^2 dA = \int_A (y'_c)^2 dA + \int_A (y)^2 dA + \int_A 2y'_c y dA$

Uit de definitie van het zwaartepunt volgt: $\int_A y'_c dA = 0$.

Dus $I' = (y'_c)^2 A + \int_A y^2 dA = I_{\text{t.o.v. de } z\text{-as door het zwaartepunt}} + (y'_c)^2 A$. **Verschuivingsstelling van "Steiner".**

Opmerking: Het kwadratisch oppervlaktemoment is minimaal t.o.v. een as door het zwaartepunt.

We brengen een orthogonaal x, y, z assenstelsel aan met de x -as als axiale richting, de y -as als symmetrieas van de dwarsdoorsnede en de z -as evenwijdig aan het buigend moment in het neutrale vlak. Uit meetkundige overwegingen (zie fig. 5.51b en blz. 253 onderaan) volgt dat de axiale rek evenredig is met de afstand tot het neutrale vlak en met de kromming (gedefinieerd als $\frac{1}{R}$): $e_x = \frac{-y}{R}$.

Voor de axiale spanning geldt dan $\sigma_x = Ee_x = \frac{-Ey}{R}$. Dit levert bijv. voor een balk met rechthoekige dwarsdoorsnede een spanningsverdeling zoals in fig. 5.52 is weergegeven. Voor de axiale kracht geldt: (zie hierbij fig. 3.53):

$$N = \int_{-c_2}^{c_1} \sigma_x b(y) dy = \int_{-c_2}^{c_1} \frac{-Ey}{R} b(y) dy = \frac{-E}{R} \int_{-c_2}^{c_1} y b(y) dy = 0 \Rightarrow \int_{-c_2}^{c_1} y b(y) dy = \int_A y dA = Q_z = 0$$

De neutrale lijn gaat dus door het zwaartepunt van de dwarsdoorsnede.

Het totale moment door de axiale spanningen uitgeoefend is gelijk aan het buigend moment M .

$$\text{Dus moet gelden: } M = - \int_{-c_2}^{c_1} \sigma_x b(y) y dy = \int_{-c_2}^{c_1} \frac{-Ey}{R} b(y) y dy = \frac{E}{R} \int_{-c_2}^{c_1} y^2 b(y) dy = \frac{E}{R} \int_A y^2 dA = \frac{EI}{R}$$

$$\text{En uit } \sigma_x = \frac{-Ey}{R} \text{ volgt: } \frac{E}{R} = \frac{-\sigma_x}{y} \text{ en dat betekent: } M = \frac{-\sigma_x(y) I}{y} \Rightarrow \boxed{\sigma_x(y) = \frac{-My}{I}}$$

In fig. 5.54 wordt dit axiale spanningsveld gevisualiseerd.

We **veronderstellen** bij deze theorie verder nog dat bij aanwezigheid van dwarskrachten de buigspanningsverdeling in de axiale richting niet verandert. De in absolute zin grootste spanning vinden we op de grootste

afstand c vanaf het neutrale vlak met $c = \max(c_1, c_2)$ geldt dan: $\boxed{\sigma_{\max} = \frac{cM}{I}}$. We noemen c ook wel **de uiterste vezelafstand**.

We definiëren nu het **weerstandsmoment van de balk** als $\boxed{S = \frac{I}{c}}$. Dus geldt ook: $\sigma_{\max} = \left| \frac{M}{S} \right|$.

Voorbeelden: (hierin wordt steeds I t.o.v het zwaartepunt bedoeld).

1. Voor een **rechthoekige balk** met breedte b en dikte d (zie fig. 5.55) geldt:

$$I = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} b y^2 dy = \left[b \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \Rightarrow \boxed{I = \frac{bd^3}{12}} \text{ en } S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{bd^3}{12}}{\frac{d}{2}} \Rightarrow \boxed{S = \frac{bd^2}{6}}$$

2. Voor een **balk met cirkelvormige dwarsdoorsnede** geldt (zie fig. 5.55):

$$I = \int_A y^2 dA = \frac{1}{2} \left(\int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA \right) = \frac{1}{2} \int_A r^2 dA = \frac{1}{2} \int_0^R r^2 2\pi r dr = \pi \int_0^R r^3 dr$$

$$\text{Dus } \boxed{I = \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{\pi}{64} D^4} \text{ en } \boxed{S = \frac{I}{R} = \frac{\pi}{32} D^3 \approx 0.1D^3}$$

Zie ook voorbeeld 5.11.

Paragraaf 5.3.2 gaat over de **berekening van de schuifspanningsverdeling** in de dwarsdoorsnede.

De maximale schuifspanning in een dwarsdoorsnede is i.h.a. van dezelfde orde van grootte als de gemiddelde schuifspanning ter plaatse: $\boxed{\tau_{\text{gem}} = \frac{V}{A}}$.

In paragraaf 5.3.2 wordt aangetoond dat bijvoorbeeld voor een rechthoekige dwarsdoorsnede geldt:

$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \tau_{\text{gem}}$. Bij slanke balken is de maximale schuifspanning in een dwarsdoorsnede in het algemeen veel

en veel kleiner dan de maximale normaalspanning in dezelfde dwarsdoorsnede. Het belang het berekenen van de schuifspanningsverdeling in een dwarsdoorsnede is daarom gering. Paragraaf 5.3.2 behoort daarom niet tot de tentamenstof.

De verhouding tussen de normaal- en schuifspanningen kan sterk afhangen van de lengte van de balk. Zie hiervoor de voorbeeld 5.13 en vervang daarin τ_{\max} door $\tau_{\text{gem}} = \frac{F}{bd}$. (welke lengte-hoogte verhouding komt daar dan uit bij $\sigma_{\max} = \tau_{\text{gem}}$?).

In **paragraaf 5.3.3**. worden I en S uitgerekend voor een aantal veel voorkomende dunwandige balkdoorsneden. Voor het kokerprofiel uit fig. 5.62 volgt dan:

$$I = \int_A y^2 dA = \frac{1}{12} b_2 d_2^3 - \frac{1}{12} b_1 d_1^3 \text{ en } S = \frac{I}{\frac{d_2}{2}} = \frac{1}{6d_2} (b_2 d_2^3 - b_1 d_1^3).$$

Voor een buis volgens fig. 5.63 volgt met essentieel dezelfde verschilmethode:

$$I = \frac{\pi}{64} (D_2^4 - D_1^4) \text{ en } S = \frac{I}{\frac{D_2}{2}} = \frac{\pi}{32D_2} (D_2^4 - D_1^4).$$

Voor het I-profiel van fig. 5.64a, vereenvoudigd tot dat in fig. 5.64b volgt met deze verschilmethode:

$$I = \frac{bd^3}{12} - \frac{(b-t_w)(d-2t_f)^3}{12}. \text{ Een alternatieve methode is: Voor het lijf (region 1 in fig 5.65a) en de flenzen (region 2 en 3) wordt afzonderlijk } I \text{ bepaald t.o.v de respectievelijke zwaartepunten en vervolgens wordt op de flenzen de verschuivingsstelling van "Steiner" toegepast:}$$

$$I = \left[\frac{t_w}{12} (d-2t_f)^3 \right] + 2 \left[\frac{b(d-2t_f)^3}{12} + bt_f \left(\frac{d-t_f}{2} \right)^2 \right] \text{ en uitwerking levert hetzelfde resultaat. De berekening}$$

van de schuifspanning zoals hierboven weergegeven geldt in voorbeeld 5.14 alleen voor het lijf omdat aan de onderzijde van de bovenste flens en de bovenzijde van de onderste flens geen schuifspanning aanwezig is. Voor de berekening van de schuifspanningsverdeling in de flenzen moet een andere methode gehanteerd worden die in het boek niet behandeld wordt. Zonder bewijs zij vermeld dat de schuifspanningen daar verwaarloosbaar klein zijn. Dit staat vermeld in de laatste alinea van voorbeeld 5.14 die u voorlopig als kennisgeving moet aannemen.

De stof van de paragrafen 5.3.4 t/m 5.3.7 behoort niet tot de tentamenstof.

Het is zeer verstandig om deze paragrafen een keer door te lezen om u bewust te worden van de beperkingen aan de toepassing van hetgeen u in dit hoofdstuk tot hier toe heeft geleerd.

Gecombineerde buiging en axiale belasting. (Paragraaf 5.4)

Het is duidelijk dat bij gecombineerde axiale belasting met buiging de neutrale lijn niet meer door het zwaartepunt gaat. De axiale spanning kan simpel door superpositie berekend worden:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} - \frac{My}{I} \text{ zie fig 5.89. We zullen onder de neutrale as die bij zuivere buiging blijven verstaan.}$$

Zie voorbeelden 5.21 en 5.22.

Opdrachten voor de zesde week:

Bestudeer paragrafen 5.3.1, 5.3.3, en 5.4

Bestudeer aandachtig de voorbeelden 5.11, 5.13 t/m 5.17, 5.21 en 5.22.

Oefenopgaven : 5.31, 5.33, 5.39 t/m 5.43, 5.53.

6 Buiging van balken-ervormingen; College en opdrachten in de zevende week

Beschouw de uitwijking van de gehele dwarsdoorsnede van de balk in de y richting zoals gedefinieerd in het vorige hoofdstuk over balken en de hoekverdraaiing van die dwarsdoorsnede op iedere plaats x langs de balk (zie fig. 6.1a en 6.1b). Voor statisch onbepaalde balken hebben we zoals we zullen zien ook de uitwijkingen en hoekverdraaiingen nodig voor de bepaling van de snedegrootheden. We zullen de vervorming vanwege afschuiving (zie fig. 6.1c) in de beschouwing verwaarlozen. Zonder bewijs zij hier vermeld dat dit zonder meer toelaatbaar is bij relatief lange slanke balken.

Om dit aan te tonen wordt hier later nog op terug gekomen

We weten uit het vorige hoofdstuk dat geldt: $\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$. We noemen het product EI ook wel de buigstijfheid. De

laterale verplaatsing van het neutrale vlak van de balk in de y richting noemen we v . In het algemeen zijn de rekken in het vlak van de doorsnede zo klein dat alle punten van de doorsnede bij benadering dezelfde laterale verplaatsing in de y richting zullen krijgen.

Kijkend naar figuur 6.2 zien we $\delta\theta = \frac{\text{de lengte van boog } A'B'}{R(x)} \approx \frac{\delta x}{R(x)}$ maar voor deze hoek geldt ook:

$\delta\theta = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x+\delta x} - \left(\frac{dv}{dx}\right)_x$ en uit gelijkstelling van deze twee uitdrukkingen voor $\delta\theta$ volgt:

$\frac{1}{R(x)} = \frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x+\delta x} - \left(\frac{dv}{dx}\right)_x}{\delta x} = \frac{d^2v}{dx^2}$. Substitutie hiervan in de eerste vergelijking van dit hoofdstuk levert

de belangrijke uitgangrelatie die we veelvuldig nodig zullen hebben:

$$M(x) = EI(x) \frac{d^2v}{dx^2} \text{ of } M(x) = EI \frac{d^2v}{dx^2} \text{ bij constante } I.$$

Let hierbij goed op hoe de positieve richting van M gedefinieerd is.

Vanwege $\frac{dM}{dx} = V(x)$ en $\frac{dV}{dx} = -w(x)$ gelden bij constante I eveneens de belangrijke relaties:

$$V(x) = EI \frac{d^3v}{dx^3} \text{ en } w(x) = -EI \frac{d^4v}{dx^4}.$$

Uit de integratie van een of meerdere van de laatste drie vergelijkingen kan de uitwijking in ieder punt berekend worden als we de randvoorwaarden goed in rekening brengen. De integratie van de eerste van deze drie verloopt meestal het eenvoudigste. Dit wordt in eerste instantie toegelicht aan de hand van een zeer eenvoudige statisch bepaalde balk met zuivere buiging in voorbeeld 6.1.

In voorbeeld 6.2 worden twee van de **vergeetmijnetjes** afgeleid: de zakking en hoekverdraaiing aan het eind van een **eenzijdig ingeklemde balk met lengte L belast met een kracht F op het uiteinde:**

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=L} = \frac{FL^2}{2EI}; \quad v(L) = \frac{FL^3}{3EI}.$$

Voor de afschuiving v_s van de balk uit voorbeeld 6.2 geldt bij benadering $v_s = \gamma L = \frac{FL}{Gbd}$ als we voor het

gemak even aannemen dat de schuifspanningsverdeling over de dwarsdoorsnede uniform is en gelijk aan $\frac{F}{bd}$.

We zoeken immers alleen maar naar de orde van grootte van de afschuiving.

De verplaatsing t.g.v. de buiging is bij een rechthoekige dwarsdoorsnede $v_b = \frac{FL^3}{3EI} = \frac{4FL^3}{Ebd^3}$.

De verhouding tussen deze twee verplaatsingen is $\frac{v_s}{v_b} = \frac{Ed^2}{4GL^2} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{d}{L}\right)^2$ bij de aanname dat de

dwarscontractiecoëfficiënt nul is. Deze verhouding is in het algemeen zeer klein en de vervorming door afschuiving kan dus terecht verwaarloosd worden.

In voorbeeld 6.3 worden de vergeetmijnetjes voor de **eenzijdig ingeklemde balk met lengte L belast met een uniforme verdeelde belasting w afgeleid:**

$$\left(\frac{dv}{dx} \right)_{x=L} = -\frac{wL^3}{6EI}; \quad v(L) = -\frac{wL^4}{8EI}$$

Leidt voor uzelf het vergeetmijnetje af voor de **eenzijdig ingeklemde balk belast met een koppel M_0 op het uiteinde:**

$$\left(\frac{dv}{dx} \right)_{x=L} = \frac{M_0L}{EI}; \quad v(L) = \frac{M_0L^2}{2EI}$$

In appendix D staan de vergeetmijnetjes tezamen met een aantal andere oplossingen van veel voorkomende gevallen opgesomt.

Zie ook de voorbeelden 6.4 en 6.5 voor de algemene werkwijze bij de afleiding van deze oplossingen. In par 6.2.2 staat uitgelegd dat discontinuïteiten in de dwarskracht en het buigend moment geïntroduceerd door krachten respectievelijk koppels het vinden van oplossingen omslachtig maakt doordat de differentiaalvergelijkingen slechts gelden voor gebieden tussen twee discontinuïteiten en derhalve vele integratieconstanten bepaald moeten worden.

Om deze complicatie te omzeilen wordt in paragraaf 6.2.2 het begrip **singulariteitsfunctie (step functions)** ingevoerd. Aangezien we ons bij handberekeningen tot relatief eenvoudige gevallen beperken (voor meer gecompliceerde gevallen gebruiken we een computerprogramma) wordt deze methode niet behandeld. **Paragraaf 6.2.2 behoort daarom niet tot de tentamenstof**, ook omdat er een alternatief is door handig gebruik te maken van de vergeetmijnetjes, superpositie en fictieve inklemmingen.

Bij lineair elastisch materiaalgedrag mag de belasting opgedeeld worden in deelbelastingen en de verplaatsingen en hoekverdraaiingen kunnen vervolgens via superpositie bepaald worden.

Voorbeelden 6.9 en 6.10 zijn daar voorbeelden van. Let bij voorbeeld 6.10 vooral op de toepassing van het zgn. kwispel-effect (het doorwerken van de hoekverdraaiing in de verplaatsing).

Als we daar alleen naar de puntkracht als belasting kijken dan is de totale verplaatsing van het uiteinde (zie fig

$$6.20) v = -\left(\delta + \theta \frac{L}{2} \right) = -\frac{5W\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI} - \frac{5W\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2EI} \frac{L}{2}$$

De tweede term in deze uitdrukking heet het **kwispel-effect**. **Let op** dit stuk wordt vaak vergeten.

De totale oplossing met de superpositie van het effect van de verdeelde belasting is in dit voorbeeld:

$$v = -\frac{5W\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI} - \frac{5W\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2EI} \frac{L}{2} - \frac{W}{L} \frac{L^4}{8EI} = -\frac{31WL^3}{48EI}$$

Deze uitkomst heeft dimensie $\frac{[N][m^3]}{\frac{N}{m^2}[m^4]} = [m]$ De

dimensiecontrole moet u steeds gebruiken bij het beoordelen van uw (deel)antwoorden.

Variërende dwarsdoorsneden: Bij een dwarsdoorsnede die afhankelijk is van de axiale coördinaat x luidt de differentiaalvergelijking voor de elastische lijn uiteraard: $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)}$.

Dit maakt het integratieproces i.h.a. veel moeilijker. Voorbeeld 6.11 geeft een uitwerking hiervan.

Bij op twee punten opgelegde balken kunnen we vaak handig gebruik maken van een zgn. fictieve inklemming.

Bij **symmetrische balken** met symmetrische belasting is dat een **denkbeeldige inklemming in het midden van de balk**. Bereken dan de oplegreacties en maak het vervangende sommetje voor de halve balk met behulp van superpositie van vergeetmijnetjes. Pas dit toe op voorbeeld 6.9 en vergelijk het resultaat met de uitkomst in het boek.

Als die symmetrie ontbreekt kan een scheve inklemming genomen worden in een verstandig gekozen punt onder een aangenomen hoek. De grootte van die hoek volgt dan uit de eis dat de verplaatsingen van de twee oplegpunten ten opzichte van het inklempunt gelijk zijn.

Opdrachten voor de zevende week:

Bestudeer aandachtig de voorbeelden 6.1 t/m 6.5 ,6.9, 6.11, en 6.12 en 6.13, maar maak voorbeeld 6.12 en 6.13 anders. Maak 6.12 met vergeetmijnetjes en superpositie onder invoering van een onbekende veerkracht R , en voorbeeld 6.13 door invoering van een scheve inklemming in punt A en de eis dat de verplaatsing en de hoekverdraaiing in B nul zijn.

Oefenopgaven: 6.5 t/m 6.7, 6.9

Buiging van balken-ervormingen; College en opdrachten in de achtste week

Indeze week worden de toepassingen van de vergeetmijnetjes behandeld en enige handigheidjes daarbij aan de hand van voorbeelden.

Vervorming van statisch onbepaalde balken.

Als het aantal reactiekrachten groter is dan 3 kunnen we die niet langer met evenwicht alleen bepalen en noemen we de balk statisch onbepaald. Voor zulke balken geldt een iets afwijkende oplosmethode.

We beschouwen in paragraaf 6.3 tevens zgn. flexibele ondersteuning. In fig. 6.22 is het model van een flexibele ondersteuning weergegeven. de reactiekracht door zo'n ondersteuning geleverd is evenredig met de verplaatsing ter plaatse. De evenredigheidsconstante in de kracht die door de ondersteuning wordt uitgeoefend heet dan de stijfheid k van de flexibele ondersteuning: $F = kv$. Bij een flexibele ondersteuning met een rotatiestijfheid is het reactiemoment ter plaatse evenredig met de hoekverdraaiing: $M = \lambda\theta$ zie fig. 6.23.

De werkwijze bij statisch onbepaalde balken is vrijwel identiek aan die bij statisch bepaalde balken.

Er wordt eerst bepaald welke ondersteuning redundant (meer dan nodig om de balk statisch bepaald te ondersteunen) zijn. Hierbij zijn dus keuzen mogelijk. Redundante ondersteuning worden vervolgens weggelaten en vervangen door onbekende krachten en/of momenten. Vervolgens moeten de vervormingen voldoen aan de beperkingen die door alle ondersteuning worden opgelegd.

In de voorbeelden 6.12, 6.13 en 6.14 wordt de werkwijze uitvoerig uit de doeken gedaan.

Redundantie van ondersteuning zal in het algemeen leiden tot grotere stijfheid van de balkconstructie.

Computermethodes

U zult merken dat het volledig doorrekenen van een ligger of balkconstructie met diverse belastingen al snel leidt tot een berg rekenwerk. Door een systematische aanpak kan dit rekenwerk geschikt gemaakt worden voor automatisering. Ook bij statisch onbepaalde balkconstructies wordt de constructie in elementen verdeeld en wordt een stelsel lineaire vergelijkingen in de onbekende vrijheidsgraden en reactiekrachten van het systeem geformuleerd en opgelost. Het eindige elementenmethode pakket MARC is een voorbeeld van een programma dat u op uw notebook kunt gebruiken.

In het Marc programma loopt de berekening als volgt :

De constructie bestaat uit balkelementen met knooppunten die al dan niet aan elkaar en aan de vaste wereld zijn verbonden. Ieder knooppunt heeft 6 al dan niet bekende vrijheidsgraden (3 onderling loodrechte translaties en 3 dito hoekverdraaiingen), en 6 al dan niet bekende uitwendige krachtgrootheden (3 onderling loodrechte krachten en 3 onderling loodrechte koppels).

Door gebruik te maken van de vergeetmijnetjes en de wet van Hooke kunnen de dwarskrachten en de buigende momenten in de knooppunten van de elementen uitgedrukt worden in de knooppuntsvrijheidsgraden. Via het evenwicht van alle knooppunten verkrijgen we na verdiscontering van de kinematische en dynamische randvoorwaarden weer een stelsel lineaire vergelijkingen in de onbekende vrijheidsgraden en de onbekende reactiekrachten en reactiemomenten.

Dit stelsel is bij voldoende gespecificeerde stijfheid en kinematische randvoorwaarden regulier en wordt dan opgelost. Vervolgens worden uit de nu bekende vrijheidsgraden de dwarskrachten en buigende momenten in de knooppunten van ieder element berekend. Daaruit kunt u dan zelf weer de spanningstoestand in ieder element afleiden met de theorie uit dit hoofdstuk. Zie ook bijlage A in deze samenvatting.

Dit proces wordt gedetailleerder beschreven in paragraaf 6.4. **Dat is echter geen tentamenstof.**

Het toepassen van het programma MARC/MENTAT is eenvoudig als u de terminologie in het voorafgaande onder de knie heeft. Probeer of u met MARC/MENTAT dezelfde resultaten kunt krijgen als in voorbeeld 6.16.

Opdrachten voor de achtste week:

Oefenopgaven: 6.13, 6.17, 6.17 met MARC/MENTAT, 6.21 en de deeltentamen- en herkansingsopgaven over dit onderwerp van de twee afgelopen jaren.

7. Torsie van assen en 8. Knik van balken; College en opdrachten in de negende week.

7. Torsie

De theorie m.b.t. de deformatie van een balk t.g.v. wringing of torsie in het algemeen is niet eenvoudig en wordt in dit vak niet behandeld. Voor cilindrische volle en holle assen, die zeer vaak voorkomen bestaat een eenvoudige theorie die we wel behandelen. In fig. 7.1 is een voorbeeld gegeven van wringing van een aandrijfjas en in fig 7.2 is het voorbeeld gegeven van torsie van een spiraalveer.

Als een soort inleiding voor de begripsvorming wordt begonnen met het meest eenvoudige geval:

Torsie van dunwandige cilinders.

Als we op een eenzijdig ingeklemde dunwandige cilinder een gelijkmatig over de omtrek verdeelde schuifspanning τ met resulterend wringend moment T op het vrije uiteinde aanbrengen dan treedt er (onder de veronderstellingen van gelijkmatige dikte en homogeen materiaalgedrag) een vervormingspatroon op zoals in fig 7.3 is weergegeven. Het eindvlak zal een hoekverdraaiing θ ondergaan zoals in figuur 7.4 is weergegeven. De cilinder kan worden opgevat als een verzameling van een groot aantal identieke elementen gelijk aan ABCD uit fig 7.4. Dit "rechthoekje" ABCD (als ABCD maar klein genoeg is nadert dat naar een plat rechthoekje) vervormt onder invloed van de torsie tot A'B'C'D'. Hierbij roteren AC en BD over een hoek ϕ . Uit het eerste hoofdstuk weten we dat de afschuifrek gedefinieerd is als $\gamma = \tan \phi$. De lengte $l_{EE'}$ van het (in het limietgeval) "lijntje" EE' bepalen we op twee manieren: $l_{EE'} = L \tan \phi$ en $l_{EE'} = R_m \theta$. Daaruit volgt door gelijkstelling: $\gamma = \frac{R_m \theta}{L}$.

Tevens geldt bij lineair elastisch materiaalgedrag: $\tau = G\gamma = \frac{GR_m \theta}{L}$ zie fig. 7.4.

Het totale wringende moment is de som van de momenten van de infinitesimale krachtjes $\delta F = \tau R_m \delta \psi t$ zoals in figuur 7.5 weergegeven. Voor het totale wringende moment volgt dus: $T = \int_0^{2\pi} \tau R_m^2 t d\psi \Rightarrow T = 2\pi \tau R_m^2 t$. Uit de

laatste twee relaties is de relatie tussen de hoekverdraaiing aan het uiteinde en het wringend moment of de schuifspanning af te leiden:

$$\frac{T}{2\pi R_m^3 t} = \frac{G\theta}{L} = \frac{\tau}{R_m}$$

Gebruikelijk is de algemenere schrijfwijze (vergeetmijntje):

$$\theta = \frac{TL}{GJ} \quad \text{met} \quad J = 2\pi R_m^3 t \quad (\text{zoals we later zullen zien geldt: } J = \int_A r^2 dA; \text{ } A \text{ is het oppervlak van de dwarsdoorsnede}).$$

Torsie van massieve assen:

Een massieve as gedraagt zich als een verzameling concentrische dunwandige cilinders. Zie fig. 7.7.

Beschouwing van de symmetrie van een klein uitgesneden schijfje uit de as voor en na belasting met een wringend moment T leert dat oorspronkelijk vlakke doorsneden vlak blijven en dat ieder straal in een dwarsdoorsnede recht blijft, zie figuur 7.8. Beschouw de ingeklemde massieve as uit fig 7.9 belast met torsiemoment T aan het "vrije" uiteinde (het kan een stuk uit een langere as zijn).

Analoog aan de dunwandige cilinder geldt nu op het buitenoppervlak: $\gamma_0 = \tan \phi_0 = \frac{R_0 \theta}{L}$ en op een

denkbeeldige cilinder met straal r : $\gamma(r) = \tan \phi = \frac{r\theta}{L}$.

Volgens de wet van Hooke geldt nu: $\tau(r) = G\gamma(r) = \frac{Gr\theta}{L}$. De schuifspanning verloopt dus lineair langs een

straal (zie fig. 7.10) en de maximale schuifspanning, gelokaliseerd bij het buitenoppervlak, is dan: $\tau_0 = \frac{GR_0 \theta}{L}$.

Het totale wringende moment is de som van de momenten van de infinitesimale momentjes: $\delta T = \tau \delta A r$.

Dus $T = \int_A \tau dA = \frac{G\theta}{L} \int_A r^2 dA$. Definieer het polaire oppervlakte moment J (of polair traagheidsmoment)

$$\text{volgens: } J = \int_A r^2 dA \Rightarrow J = \int_0^{R_0} 2\pi r^3 dr.$$

Dan kunnen we schrijven: $T = \frac{GJ\theta}{L}$ of $\theta = \frac{TL}{GJ}$. **Deze uitdrukking is identiek aan die bij de dunwandige**

cilinder. Alleen de waarde van J is verschillend. Voor de schuifspanning resulteert: $\tau(r) = \frac{Tr}{J}$ en dit is

analoog aan de uitdrukking voor de normaalspanning bij buiging: $\sigma = -\frac{My}{I}$.

Holle assen.

De redenering voor een holle as is volkomen identiek.. Voor het polaire oppervlaktemoment geldt nu:

$$J = \int_A r^2 dA = \int_{R_i}^{R_0} 2\pi r^3 dr = \frac{\pi}{2} (R_0^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{32} (D_0^4 - D_i^4) \approx 0.1 (D_0^4 - D_i^4).$$

Voor een dunwandige cilinder geldt: $R_i \approx R_0 \approx R_m$ met R_m de gemiddelde straal.

$$\text{Er geldt dan ook: } J = \frac{\pi}{2} (R_0^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{2} (R_0^2 + R_i^2)(R_0 + R_i)(R_0 - R_i) \approx \frac{\pi}{2} (2R_m^2)(2R_m)t = 2\pi R_m^3 t$$

Bij een wanddikte van 20% van de binnendiameter is de fout in de berekening van J bij de benadering als dunwandige cilinder $\pm 1.2\%$.

Assen met discontinu veranderende doorsnede.

In de voorbeelden van fig.7.14a en b hebben de twee delen met lengtes L_1 en L_2 de polaire oppervlaktemomenten J_1 en J_2 . Het is duidelijk dat de hoekverdraaiing van de twee uiteinden van de as ten opzichte van

elkaar bestaat uit de som van de bijdragen van de twee delen: $\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{T}{G} \left(\frac{L_1}{J_1} + \frac{L_2}{J_2} \right)$.

Assen met continu veranderende doorsnede: .

In dit geval vatten we de totale bijdrage op als de som van oneindig veel infinitesimaal kleine bijdragen:

$$\theta = \frac{T}{G} \int_0^L \frac{1}{J(z)} dz. \text{ Bij het voorbeeld van fig 7.16 geldt: } J(z) = J(0)(1 - \alpha z)^4 = J_1(1 - \alpha z)^4.$$

Hieruit volgt dan: $\theta = \frac{T}{3\alpha G J_1} \left[\frac{R_1^3}{R_2^3} - 1 \right]$ en $\tau(z, r) = \frac{Tr}{J(z)}$. Voor de maximale schuifspanning geldt dus:

$$\tau_0(z) = \frac{TR(z)}{J(z)} \text{ en deze blijkt het grootst te zijn op de buitenrand in de kleinste doorsnede.}$$

Dynamisch evenwicht.

Assen worden vaak gebruikt voor aandrijvingen die een bepaald **vermogen** doorgeven. Dit vermogen is dan gedefinieerd als het produkt van het doorgeleide koppel en de hoeksnelheid van de as. In formulevorm $P = T\omega$. De hoeksnelheid geven we weer in radialen/s, dimensie [1/s]. De dimensie van vermogen is derhalve [Nm/s].

De stof over tandwieloverbrengingen in par.7.2 na voorbeeld 7.5 is geen tentamenstof.

Als de **as statisch onbepaald** is wordt weer een oplossing gevonden door onbekende torsiemomenten mee te nemen in de beschouwing en vervolgens aansluiting te eisen. In de voorbeelden 7.7 en 7.8 wordt die werkwijze gedemonstreerd. In de voorbeelden 7.9 en 7.10 zijn de verplaatsingen en rotaties het gevolg van **gecombineerde buiging en torsie**.

8. Knik van stutten en kolommen.

Het kenmerkende van stabiliteitsberekeningen aan deformeerbare lichamen in dit hoofdstuk is dat er van uit gegaan wordt dat er vanaf een bepaalde grootte van de voor de constructie karakteristieke belasting (de kritische belasting) meerdere evenwichtspaden (deformatieontwikkelingen bij dezelfde belastingsontwikkeling)

mogelijk zijn. Deze paden kunnen **stabiel, neutraal of instabiel** zijn. In figuur 8.3 is voor een puntmassa in het zwaartekrachtsveld op een vaste ondergrond geïllustreerd wat met deze drie toestanden bedoeld wordt. Een kleine uitwijking uit een stabiele toestand groeit niet vanzelf aan. Er moet arbeid aan het systeem worden toegevoegd om een uitwijking uit de stabiele toestand te veroorzaken. Een kleine uitwijking uit een instabiele toestand groeit vanzelf aan en er komt dan energie vrij. De belasting-vervormings relaties bij deformeerbare systemen in evenwicht kennen dan negatieve hellingen. De draagkracht stort dan in. We zeggen dan ook wel in goed "nederlands": de constructie vertoont "softening", d.w.z. kracht-verplaatsings diagrammen krijgen negatieve hellingen. Bij een neutraal evenwicht kan een kleine verandering van uitwijking zonder arbeid of energieuitwisseling gerealiseerd worden. Het neutrale evenwicht is veelal een overgangstoestand tussen een stabiele en een instabiele toestand (Let op: in het mathematisch model vaak het gevolg van gelineariseerde modelvorming).

We verstaan in het volgende onder **een perfect systeem** een systeem met een **systeemkarakteristieke belasting** dat beneden een bepaald niveau van deze belasting een vervormingspatroon heeft dat gekenmerkt wordt door een **systeemkarakteristiek primair patroon van vervormingen die klein zijn** (soms verwaarloosd worden) en boven dat niveau een **eveneens systeemkarakteristiek secundair patroon met (vaak ongewenste) vervormingen** vertoont. *Denk hierbij bijvoorbeeld aan een perfecte drukbalk. Zo'n perfecte rechte drukbalk met een zuiver centriscche belasting heeft primair een axiaal verplaatsingsveld. Boven een bepaalde kritische belasting treedt vrij plotseling ook buiging op.*

Het gaat hierbij in de praktijk om -als **perfecte** systemen gemodelleerde constructies- die bij belastingstoename beneden een bepaalde kritische belasting een primair stabiel evenwichtspad volgen en daarboven een secundair evenwichtspad kunnen bewandelen waarbij het primaire pad instabiel wordt en het secundaire pad leidt tot (vaak excessief grote) vervormingen. Dit secundaire evenwichtspad kan aanvankelijk stabiel, neutraal of instabiel zijn. Het eerste geval wordt vaak niet kwaadaardige "instabiliteit" genoemd. De andere gevallen worden als kwaadaardige instabiliteiten gekarakteriseerd.

Omdat vanaf een bepaalde kritische belasting meerdere evenwichtspaden voor de deformatie mogelijk moeten zijn, dienen we bij de perfecte systemen de secundaire vervormingen in de evenwichtsvergelijkingen te betrekken. Dit wordt dan verkregen door niet langer uit te gaan van evenwicht in de onvervormde toestand (zoals we dat in de vorige hoofdstukken hebben gedaan). Het evenwicht wordt opgesteld in de vervormde toestand (m.b.t. de karakteristieke secundaire vervormings-mogelijkhe(id(en)) waarvan men via nauwkeurige waarneming bij experimenten weet moet hebben bij het opstellen van het mechanische model van de werkelijkheid. De maximale belasting die gekenmerkt wordt door onafhankelijkheid van kleine secundaire deformaties is dan de **kritische belasting**. Voorbij dit punt op het primaire evenwichtspad wordt het primaire evenwichtspad dan instabiel omdat er bij die belasting energie vrij komt bij de overgang naar het secundaire pad.

Waar het in dit hoofdstuk eigenlijk om gaat is de toepassing met betrekking tot de perfecte systemen: stutten (lange slanke niet dunwandige balken of staven met vrijheid tot hoekverdraaiing van de uiteinden) en kolommen (lange slanke niet dunwandige balken of staven die minstens aan een zijde ingeklemd zijn) onder axiale belasting.

In verband met de beschikbare tijd moeten we dit hoofdstuk laten vervallen.

Voor de kritische knikkracht P_c geldt:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \text{ met de equivalente lengte } L_e \text{ gedefinieerd als } L_e = L \text{ bij een stut en met } L_e = 0,5L \text{ bij een}$$

aan 2 uiteinden ingeklemd kolom en $L_e = 2L$ bij een kolom die aan 1 uiteinde ingeklemd is en het andere uiteinde vrij. Voor andere gevallen kunt u L_e zelf bepalen als u hoofdstuk 8 bestudeert.

Opdrachten voor de negende week:

Bestudeer aandachtig de voorbeelden: 7.1 t/m 7.5, 7.7, 7.9.

Oefenopgaven over torsie: 7.1, 7.3, 7.5, 7.7, 7.11, 7.13, 7.17, 7.19. Gebruik waar mogelijk ook eens Mentat.

Oefenopgaven over knik: 8.4, 8.5, 8.10.

Aanvulling m.b.t. de toelaatbare spanningen bij gecombineerde trek buiging en torsie t.b.v het O.G.O.

In hoofdstuk 5 hebben we gezien hoe bij gecombineerde trek en buiging de axiale spanning berekend moet worden. De in absolute waarde maximale axiale spanning noemen we dan de vergelijkspanning σ_c . Voor deze vergelijkspanning moet dan gelden: $S \times \sigma_c \leq \sigma_u$. Hierin is S de veiligheidscoëfficiënt en σ_u de uiterste spanning (bij staal wordt hiervoor vaak de vloeispanning σ_y genomen).

Bij gecombineerde trek buiging en torsie zullen we zonder verdere discussie aannemen dat de vergelijkspanning gelijk is aan $\sigma_c = \left(\sqrt{(\sigma_{axiaal})^2 + 4(\tau_{torsie})^2} \right)_{\max}$. (wordt behandeld in hoofdstuk 9).

Ook nu weer moet gelden $S \times \sigma_c \leq \sigma_u$. Bij drukstaven moet tevens nog gekeken worden naar de knik-criteria waaraan de axiale spanning moet voldoen.

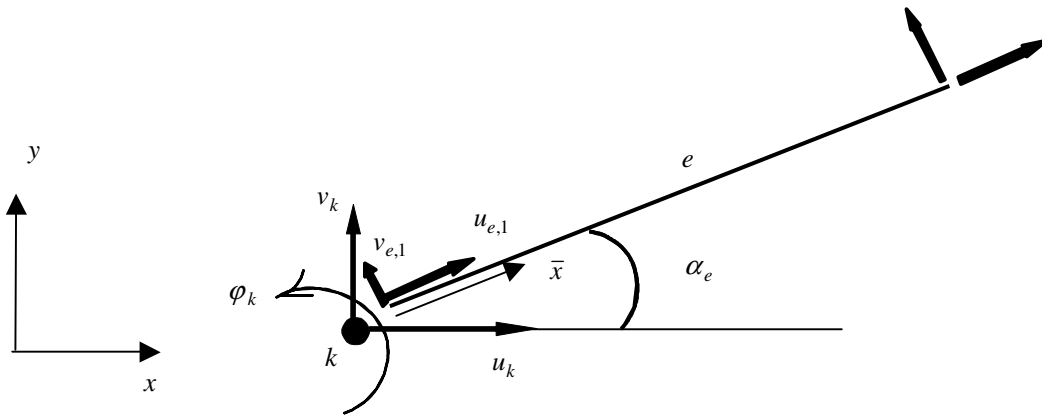
Bijlage A. Principe van de 2D EEM voor 2D-balkconstructies.

N_k is het totale aantal knooppunten van een balkenconstructie. Noem de verplaatsingen u_i, v_i, φ_i voor $i = 1, 2, \dots, N_k$ de globale vrijheidsgraden van een balkenconstructie, en noem de complete verzameling van globale constructievrijheidsgraden \underline{u} . Dus $\underline{u} = [u_1, v_1, \varphi_1, u_2, v_2, \varphi_2, \dots, u_{N_k}, v_{N_k}, \varphi_{N_k}]$

De verzameling lokale (geroteerde) vrijheidsgraden van element e , te weten $[u_{e,1}, v_{e,1}, \varphi_{e,1}, u_{e,2}, v_{e,2}, \varphi_{e,2}]$ noemen we \underline{u}_e . Iedere verzameling \underline{u}_e voor $e = 1, 2, \dots, N_e$ kan uitgedrukt worden in de elementen van \underline{u} . N_e is het totale aantal elementen in de constructie.

Bijvoorbeeld voor element e verbonden met globaal knooppunt k geldt:

$$u_{e,1} = u_k \cos(\alpha_e) + v_k \sin(\alpha_e); \quad v_{e,1} = -u_k \sin(\alpha_e) + v_k \cos(\alpha_e); \quad \varphi_{e,1} = \varphi_k.$$



We leggen een lokale \bar{x} -as langs de elementen lopend van lokaal knooppunt 1 naar lokaal knooppunt 2 en **we nemen aan** dat voor de balkelementen geldt: $v_e = a + b\bar{x} + c\bar{x}^2 + d\bar{x}^3$. Dan kunnen we met de randvoorwaarden $v_e(\bar{x} = 0) = v_{e,1}$; $\varphi_e(\bar{x} = 0) = \varphi_{e,1}$; $v_e(\bar{x} = l) = v_{e,2}$; $\varphi_e(\bar{x} = l) = \varphi_{e,2}$. De coëfficiënten a, b, c , en d uitdrukken in de elementen van \underline{u}_e , dus ook in de elementen van \underline{u} .

Bijvoorbeeld uit $v_e(\bar{x} = 0) = v_{e,1}$ volgt meteen dat $a = v_{e,1} = -u_k \sin(\alpha_e) + v_k \cos(\alpha_e)$.

En omdat $\varphi_e = \frac{dv_e}{d\bar{x}} = b + 2c\bar{x} + 3d\bar{x}^2$ volgt uit $\varphi_e(\bar{x} = 0) = \varphi_{e,1}$ meteen $b = \varphi_{e,1} = \varphi_k$.

We kunnen bij die aanname van een derdegraads transversaal verplaatsingsveld dus formeel schrijven

$$v_e(\underline{u}, \bar{x}) = a(\underline{u}) + b(\underline{u})\bar{x} + c(\underline{u})\bar{x}^2 + d(\underline{u})\bar{x}^3.$$

Voor het buigend moment kunnen we schrijven $M(\underline{u}, \bar{x}) = EI \frac{d^2 v}{d\bar{x}^2} = 2c(\underline{u}) + 6d(\underline{u})\bar{x}$.

Voor de dwarskracht geldt dan $V(\underline{u}) = EI \frac{d^3 v}{d\bar{x}^3} = 6d(\underline{u})$.

De **dwarskracht in het element is dus constant** en **het moment verloopt lineair** tussen $M_{e,1} = M_{e,1}(\bar{x} = 0) = 2c(\underline{u})$ en

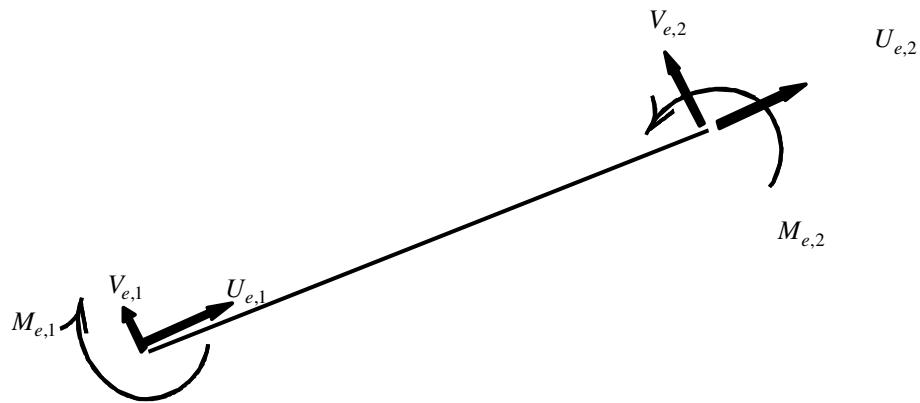
$$M_{e,2} = M_{e,2}(\bar{x} = l) = 2c(\underline{u}) + 6d(\underline{u})l.$$

Voor de axiale krachten kunnen we schrijven $U_{e,1} = -N_{e,1} = \frac{(u_{e,1} - u_{e,2})}{l_e} E_e A_e = k_e (u_{e,1}(\underline{u}) - u_{e,2}(\underline{u}))$.

$$\text{en ook } U_{e,2} = +N_{e,1} = \frac{(u_{e,2} - u_{e,1})}{l_e} E_e A_e = k_e (u_{e,2}(\underline{u}) - u_{e,1}(\underline{u}))$$

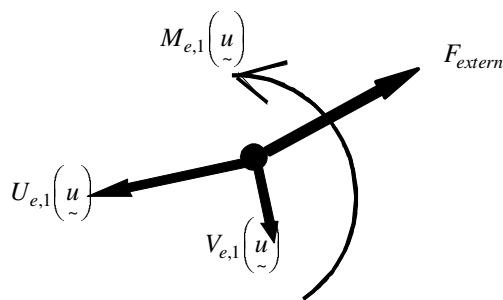
De verzameling van knooppuntsbelastingen $\underline{f}_e = [U_{e,1}, V_{e,1}, M_{e,1}, U_{2,e}, V_{e,2}, M_{e,2}]$ is dus eenduidig bepaald door \underline{u} .

Formeel kunnen we schrijven $\underline{f}_e(\underline{u}) = [U_{e,1}(\underline{u}), V_{e,1}(\underline{u}), M_{e,1}(\underline{u}), U_{2,e}(\underline{u}), V_{e,2}(\underline{u}), M_{e,2}(\underline{u})]$.



We gaan nu weer terug naar knooppunt k .

Van alle elementen e die met dit knooppunt zijn verbonden werken hierop wegens actie is reactie in de tegengestelde richtingen $U_{e,1}(\tilde{u})$, $V_{e,1}(\tilde{u})$ en $M_{e,1}(\tilde{u})$ en de eventueel bekende kracht en/of het bekende moment van de externe belasting.



Nu zijn er 3 evenwichtvergelijkingen voor dit knooppunt: $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum M_z = 0$;

In totaal zijn er $3N_k$ vergelijkingen waarin N_k het aantal knooppunten van de constructie is.

Het aantal onbekenden is eveneens $3N_k$ want in ieder knooppunt zijn er 3 onbekenden, namelijk u_k of reactiekracht $R_{k,x}$, v_k of reactiekracht $R_{k,y}$ en φ_k of $M_{k,z}$.

Als de beweging als star lichaam onderdrukt is, is dit stelsel oplosbaar.

De oplossing is de daarna bekende \tilde{u} .

Uit \tilde{u} kan voor ieder element u_e berekend worden en daaruit f_e . Hiermee is dan dus alles bepaald.

In de "graphical userinterface" (GUI) MENTAT worden de gegevens ingelezen en opgeslagen in een binaire .mud of leesbare ASCII .mfd file en uitgevoerd als invoer voor MARC in een leesbare ASCII .dat file.

Het opstellen van de vergelijkingen, het oplossen van \tilde{u} en de bepaling van de "elementknooppuntskrachten" f_e wordt

door het eindige elementenprogramma MARC gedaan. De resultaten en foutmeldingen worden uitgevoerd in een leesbare ASCII .out file en een binaire .t16 en/of leesbare ASCII .t19 file waarmee de resultaten in de "graphical userinterface" (GUI) MENTAT zichtbaar gemaakt kunnen worden. Tevens wordt door MARC nog een leesbare ASCII .log file aangemaakt. De andere files zijn in dit stadium irrelevant.

Niets overgenomen uit
andermans of eigen via een
uitgever gepubliceerd werk.