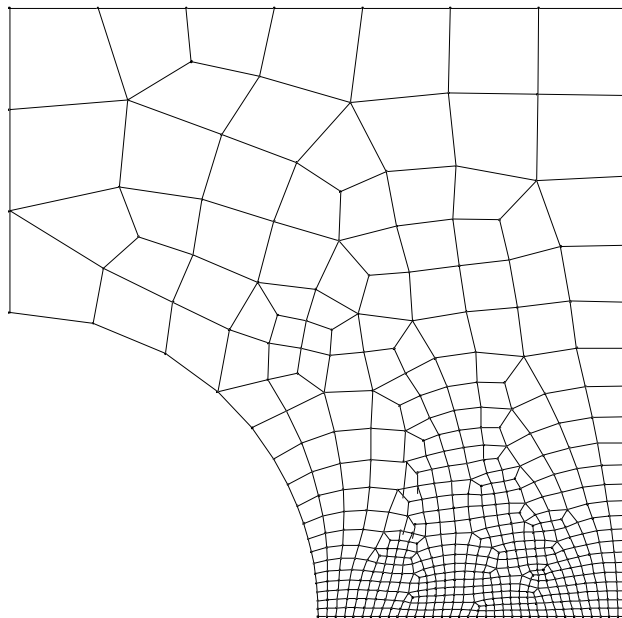


# **Eindige Elementen Methode**

Syllabus over het gebruik in de lineair elastische  
vaste stof mechanica;

Cursus 2001-2002, Trimester 2.2



ir. J.H.P. de Vree  
Technische Universiteit Eindhoven  
Faculteit Werktuigbouwkunde  
Materials Technology

# Inhoud

## Inleiding

## Notatieafspraken

### 1 Staaf- en balkconstructies

- 1.1 Een eenvoudig voorbeeld van de e.e.m. werkwijze met staafelementen
- 1.2 Numerieke aspecten bij het oplossingsproces
  - 1.2.1 Het in rekening brengen van de randvoorwaarden
    - 1.2.1.1 Hernummering van rijen en kolommen; permutatie
    - 1.2.1.2 Alternatieve verwerking van de kinematische randvoorwaarden
  - 1.2.2 De verplaatsing als star lichaam
  - 1.2.3 Eigenschappen van de stijfheidsmatrix
- 1.3 Een 3-D balkelement als voorbeeld van een structureel element
  - 1.3.1 Een eenvoudig tweeknoops staafelement
  - 1.3.2 Een eenvoudig tweeknoops 3-D buigbalkelement (Bernoulli)
  - 1.3.3 Een eenvoudig torsiebalkelement
  - 1.3.4 Een eenvoudig 3-D frame-element

### 2 De geometrisch en fysisch lineaire elasticiteitstheorie

- 2.1 Discrete- versus continuümselementen
- 2.2 De 3-D continuümformulering
  - 2.2.1 Kinematica
  - 2.2.2 Constitutieve vergelijkingen
  - 2.2.3 De evenwichtsvergelijkingen
- 2.3 Samenvatting van de geometrisch en fysisch lineaire elasticiteitsleer in de continuümmechanica
- 2.4 De toestandsbeschrijving van het 2-D vlakspanningscontinuüm
  - 2.4.1 Kinematica
  - 2.4.2 Constitutieve vergelijkingen
  - 2.4.3 De evenwichtsvergelijkingen
- 2.5 Samenvatting van de geometrisch en fysisch lineaire elasticiteitsleer bij vlakspanning

### 3 Eindige elementen discretisering

- 3.1 Benaderingsfuncties voor het verplaatsingsveld
- 3.2 De problematiek van aansluiting of compatibiliteit
- 3.3 Een vlak driehoekig element als eenvoudig voorbeeld
- 3.4 Een incompatibel vlak element met 4 knooppunten
- 3.5 Een vlak vierhoekig 8-knoops isoparametrisch element met kromme randen
  - 3.5.1 Geometrie basiselement.
  - 3.5.2 Transformatie van het coördinatensysteem
  - 3.5.3 Verplaatsing als star lichaam en homogene deformatie
  - 3.5.4 Vormfuncties voor het vierhoekige achtknoops element

- 3.5.5 De uitdrukking voor de kolom met rekken
- 3.6 Isoparametrische 3-D ruimtelijk element met kromme randen

#### **4 Berekening van de knooppuntsverplaatsingen uit de evenwichtsvergelijkingen**

- 4.1 De evenwichtsvergelijkingen
- 4.2 De gewogen afwijkingen formulering van het evenwicht
- 4.3 De balans van interne en externe krachten op een element
- 4.4 Afleiding van de stijfheidsmatrix en de externe krachtenkolom van een element
- 4.5 De bepaling van de verplaatsingen, rekken en spanningen
- 4.6 Numerieke integratie van de element stijfheidsmatrix
  - 4.6.1 Probleemstelling en globale werkwijze
  - 4.6.2 Toepassing van numerieke integratie voor de berekening van de stijfheidsmatrix en de externe krachtenkolom van een element
- 4.7 De structuur van een eindige elementen methode programma

#### **5 Dynamica**

- 5.1 De bewegingsvergelijkingen
  - 5.1.1 De zwakke formulering van de bewegingsvergelijkingen
  - 5.1.2 Eindige elementen discretisatie
- 5.2 Oplossingsstrategieën
  - 5.2.1 Eigenwaarde analyse voor het vrije ongedempte trillingsgedrag
  - 5.2.2 “Transient” oplossingen met de modale superpositie methode
  - 5.2.3 “Steady state” oplossingen bij periodieke excitatie
    - 5.2.3.1 Harmonische analyse op basis van modale analyse
    - 5.2.3.2 Harmonische analyse met de directe methode
  - 5.2.4 “Transient” oplossingen met numerieke tijdsintegratie
    - 5.2.4.1 De expliciete centrale differentiemethode
    - 5.2.4.2 De impliciete trapeziumregel
    - 5.2.4.3 Geavanceerde integratieschema's

#### **Appendices**

- A De stelling van Gauss

#### **Referenties**

#### **Opgaven**

#### **Antwoorden**

#### **Uitwerkingen**

#### **Opdrachten met het programmapakket MARC**

# Inleiding

De doelstelling van deze cursus is het met begrip leren omgaan met een krachtig ingenieursgereedschap, de “Eindige Elementen Methode” (e.e.m.) in de vaste stof mechanica. De nadruk ligt daarbij op **begrip en de praktische toepassing voor lineair elastisch materiaalgedrag**. In dit vak wordt numerieke mechanica beoefend, voortbouwend op de kennis die u in voorgaande mechanica vakken is aangeboden met een accent op modelvorming die geschikt is voor oplossing met de computer. De naam van dit vak kan misleidend werken. Die wekt misschien de indruk dat deze cursus opleidt tot vaardigheid in het achter de computer oplossen van mechanicaproblemen. Het gaat er echter meer om inzicht te verwerven in de manier waarop de mechanicaproblemen gemodelleerd worden en door de computer worden opgelost dan om het verkrijgen van vaardigheid in het gebruik van een of ander software-pakket. In het bedrijfsleven zijn het vaak geroutineerde HTS-ers of zelfs MTS-ers die met de Eindige elementen methode pakketten werken aan standaard lineaire problemen. Deze mensen hebben vaak na jarenlange ervaring grote vaardigheid in het werken met software-pakketten verworven maar kennen veelal niet of in zeer beperkte mate de achtergronden daarvan. Als ingenieur kunt u dan verantwoordelijk zijn voor de gebruikte modellering en de daarmee samenhangende resultaten. Bij de begeleiding van studenten bij stages en afstudeerprojecten blijkt steeds weer dat vrijwel alle fouten voortkomen uit een gebrek aan inzicht in de modellering en systematiek van deze software-pakketten en niet uit een gebrek aan vaardigheid in het gebruik ervan. Het volgen van de cursus leidt tot verwerving van :

- a. een minimaal vereist inzicht in de werking van de e.e.m. voor het merendeel van de constructeurs problemen en
- b. het kunnen bestuderen van de literatuur in het geval van geavanceerdere berekeningen (bijvoorbeeld niet-lineaire met een complex constitutief verband).

De opgaven zijn een middel om tot inzicht in de achterliggende theorie te komen omdat daarin de theorie op dermate eenvoudige systemen wordt toegepast, dat daarvoor het hulpmiddel, de computer, niet nodig is. De software-pakketten zijn niet anders dan geavanceerde wordprocessors waarmee u uw probleem aan de rekenmachine aanbiedt. Ze zijn onderhevig aan voortdurende veranderingen en modeverschijnselen. De basis waarop ze berusten verandert veel minder snel.

De Eindige Elementen Methode e.e.m. is een methode voor het vinden van benaderingsoplossingen voor stelsels van partiële differentiaalvergelijkingen. Binnen deze cursus zullen dat de bewegingsvergelijkingen van Newton zijn die voor ieder materieel punt binnen de systeemgrenzen moeten gelden. De leerstof in deze cursus is beperkt tot een grote maar zeer specifieke klasse van problemen waar constructeurs mee te maken kunnen krijgen. Dit zijn constructies van isotroop en lineair elastisch materiaal onder mechanische belasting. De temperatuur speelt hierin geen rol. De e.e.m. is ook van toepassing op vloeistofstroming, warmtegeleiding, diffusie en combinaties hiervan. Deze onderwerpen zullen in andere cursussen aan de orde komen. De gepresenteerde theorie is alleen geldig als overal in het beschouwde systeem het materiaalgedrag lineair elastisch is (fysisch lineair gedrag) en de rekken en rotaties van de materie overal klein zijn (geometrisch lineair gedrag). Hoe klein dat is, zal later nader worden toegelicht. Dit is dus een benadering die alleen goed is als aan de voorwaarde van kleine rekken en kleine rotaties als star lichaam is voldaan.

We beginnen met (quasi-)statische systemen. Dit zijn systemen waarbij de belasting zo langzaam wordt aangebracht dat de tijd in de beschouwing een te verwaarlozen rol speelt. De

bewegingsvergelijkingen worden door afwezigheid van de dempings- en traagheidstermen identiek aan de evenwichtsvergelijkingen. Daarna worden ook dynamische systemen beschouwd met een tijdsafhankelijke belasting en daarmee samenhangende respons.

Ieder materieel punt van een elastisch lichaam zal onder invloed van een aangebrachte mechanische belasting een verplaatsing ondergaan ten opzichte van de onbelaste referentieconfiguratie die eenduidig in de ruimte wordt vastgelegd. Men spreekt dan van een verplaatsingsveld binnen het domein van de constructie. In een Cartesisch assenstelsel heeft dit verplaatsingsveld 3 componenten in ieder ruimtelijk punt van de constructie. De starre lichaamsbeweging van een beschouwde constructie moet in verband met die eenduidigheid onderdrukt worden door het stellen van voorwaarden aan het verplaatsingsveld op de rand van het systeem. Voorwaarden opgelegd aan het verplaatsingsveld worden kinematische randvoorwaarden genoemd. De “krachten” op het beschouwde systeem worden met de dynamische randvoorwaarden in rekening gebracht. Onder krachten worden hier verstaan: puntkrachten, krachten per lengte- of oppervlakte-eenheid (tracties of drukken), koppels en koppels per lengte-eenheid. Als het verplaatsingsveld van de belaste constructie volledig als functie van de ruimtelijke coördinaten bekend is, dan ligt daarmee via de rek-verplaatsingsrelaties ook de rektoestand in ieder punt vast. Die rektoestand wordt bij een gekozen coördinatenstelsel vastgelegd door 6 onafhankelijke rekcomponenten. Bij een isotroop lineair elastisch materiaal is het constitutieve verband tussen deze rekcomponenten en de 6 onafhankelijke spanningscomponenten door de wet van Hooke gegeven. In de statica zullen die spanningscomponenten vervolgens aan de lokale evenwichtsvergelijkingen moeten voldoen. Het probleem is nu dat het verplaatsingsveld meestal niet a priori bekend is en daarmee dan de primaire onbekende is.

De strategie voor het oplossen van statica problemen met de e.e.m. is de volgende:

1. Verdeel de constructie in deelgebieden, zogenaamde elementen met elementranden en elementknooppunten op die randen.
2. Druk het onbekende verplaatsingsveld binnen de elementen met behulp van benaderingsfuncties uit in (deels onbekende) knooppunt-vrijheidsgraden. Deze vrijheidsgraden zijn dan verplaatsingen of ruimtelijke afgeleiden daarvan, waarin alle verplaatsingscomponenten zijn uit te drukken.
3. Druk de rekken binnen de elementen volgens de rek-verplaatsingsrelaties uit in de ruimtelijke coördinaten met de knooppunt-vrijheidsgraden als parameters.
4. Druk via de wet van Hooke de spanningen uit in de knooppunt-vrijheidsgraden.
5. Substitueer de gevonden spanningen uitgedrukt in de knooppunt-vrijheidsgraden in de evenwichtsvergelijkingen en zwak de eis van evenwicht af tot de eis van (op een speciale manier gewogen) gemiddeld evenwicht voor ieder element.

Het zal blijken dat via deze werkwijze een lineair stelsel vergelijkingen in de knooppunt-vrijheidsgraden verkregen wordt, waaruit de onbekende knooppunt-vrijheidsgraden eenvoudig opgelost kunnen worden. De vergelijkingen in dit stelsel worden ook wel de gediscretiseerde evenwichtvergelijkingen genoemd. Vervolgens kunnen dan de benaderingen voor de rekken en de spanningen op de boven beschreven wijze worden bepaald. Dit proces zal ter illustratie voor een aantal eenvoudige gevallen worden uitgevoerd. Voor een aantal andere gevallen kan met behulp van het geleerde eenvoudig een ingang tot de literatuur verkregen worden. Bij een aantal problemen, zoals bijvoorbeeld bij toepassing van (gekromde) schaalementen is de afleiding van het lineaire stelsel vergelijkingen uiterst gecompliceerd. In het pakket keuzevakken van de faculteit werktuigbouwkunde worden daartoe specialistische cursussen aangeboden. Kennis van de inhoud van de onderhavige cursus zal echter voldoende zijn voor het kunnen toepassen van alle soorten elementen voor lineair elastisch materiaalgedrag en geometrisch lineair gedrag van constructies. Bij een dynamische (tijdsafhankelijke) belasting

die op een zodanige tijdschaal plaatsvindt dat het systeem ervan in trilling raakt kunnen de dempings- en traagheidstermen uiteraard niet verwaarloosd worden en ontstaat er een stelsel vergelijkingen waarin niet alleen de knooppunt-vrijheidsgraden voorkomen maar ook hun eerste en tweede afgeleiden naar de tijd. Dit worden dan de gediscrètiseerde bewegingsvergelijkingen genoemd. De respons wordt vervolgens bijvoorbeeld via een numeriek tijdsintegratie-schema als functie van de tijd bepaald. We zullen in de volgende hoofdstukken een en ander toelichten aan de hand van relatief eenvoudige voorbeelden. Generalisatie naar meer ingewikkelde situaties zijn daarna eenvoudig voor te stellen.

Niet altijd wordt uitgegaan van de algemene 3-D elasticiteitstheorie. Er zijn namelijk velerlei bijzondere theorieën die betrekking hebben op zeer specifieke omstandigheden of kenmerken van constructies en belastingen.

Deze speciale theorieën zijn benaderingen van de algemene 3-D theorie doordat er voorwaardelijk geldige veronderstellingen zijn toegevoegd met het doel om een simpelere en snellere rekenwijze te verkrijgen als de constructie kan worden samengesteld uit dergelijke basisconstructies. Zo bestaan er naast een aantal verschillende soorten 3-D elementen nog verscheidene andere soorten elementen

- Staafelementen bij de staventheorie
- Balkelementen bij verschillende balkbuigingstheorieën
- Torsiestaafelementen bij verschillende torsiebalktheorieën
- Frame-elementen, bij gecombineerde staaf-balkbuiging- en torsietheorieën
- Vlakspannings (of vlakvervormings)-elementen bij de vlakspannings- (of vlakvervormings-) theorie
- Axisymmetrische ringelementen bij axisymmetrische constructies en dito belasting
- Plaat-elementen bij (mathematisch vaak zeer gecompliceerde) plaatbuigingstheorieën
- Schaalementen, bij gecombineerde membraan- en buigingstheorieën

Bij een vruchtbaar gebruik van de verschillende soorten elementen hoort een minimale kennis van de achterliggende theorieën. Zonder deze kennis kunnen minder, en minder juiste, conclusies worden getrokken uit de resultaten van berekeningen. De hele werkwijze van de eindige elementen methode kan het eenvoudigst worden toegelicht aan de hand van de staventheorie zoals dat ook in het eerste jaar in het boek “Mechanics of Solids” van Fenner is weergegeven. Daarom wordt daarmee begonnen.

Het oefenen met een commercieel e.e.m. programmapakket MARC in diverse situaties die representatief zijn voor de problemen van de constructeur en het interpreteren van de resultaten maakt deel uit van deze cursus.

Op het tentamen zal uw theoretische kennis worden getoetst aan de hand van vraagstukken. Uiteraard dient u ook aan te tonen dat u over de meest elementaire vaardigheden in het gebruik van een software-pakket beschikt. Daarom wordt ook uw vaardigheid met een programmapakket getoetst wordt. Om u hierin te bekwamen kunt u oefenen met het pakket “MARC/MENTAT”. In de 3 uur per week die daar voor staan dient u dus niet alleen de oefenvraagstukken te maken maar ook de computeroefeningen te doen die u zullen worden voorgesteld. U krijgt in de begeleide zelfstudie sessies terugkoppeling over de computeroefeningen. Als u te lang wacht tussen de demonstraties met MARC/MENTAT op het college en het praktisch oefenen ermee dan komt u in de problemen omdat dan niet ieders vragen in de periode vlak voor het tentamen beantwoord kunnen worden. Werk dus ongeveer synchroon met het onderwijsschema. Hieronder is het globale overzicht van de cursus weergegeven. Het kan zijn dat motieven van praktische aard in de loop van de cursus een afwijking van dit schema veroorzaken.

### Rooster

Week nr.	Eerste 2 college-uren	3 uur zelfstudie. Opgaven ( $\pm 50\%$ ) Oefeningen met MARC in open shop	Tweede 2 college-uren
1	College (theorie)	vraagstukken maken	College (theorie)
2	College( numeriek/MARC)	vraagstukken maken c.q MARC oefening	Begeleide oefening
3	Terugkoppeling MARC oefeningen	vraagstukken maken c.q MARC oefening	Begeleide oefening
4	College (theorie)	vraagstukken maken c.q MARC oefening	College (theorie)
5	College( numeriek/MARC)	vraagstukken maken c.q MARC oefening	Begeleide oefening
6	Terugkoppeling MARC oefeningen	vraagstukken maken c.q MARC oefening	Begeleide oefening
7	College (theorie)	vraagstukken maken c.q MARC oefening	College (theorie)
8	College( numeriek/MARC)	vraagstukken maken c.q MARC oefening	Begeleide oefening
9	Terugkoppeling MARC oefeningen	vraagstukken maken c.q MARC oefening	Begeleide oefening

### Notatie-afspraken

In deze syllabus gelden de volgende notatie-afspraken:

- Skalare variabelen zijn *cursief*, bijvoorbeeld:  $a, \alpha, A$ .  
(N.B. Sommige printers drukken helaas geen cursieve griekse symbolen af, en daarom staan die tegen mijn wil in dit document dan niet cursief.)
- Kolommen zijn *cursief* met een slangetje onder het symbool, bijvoorbeeld:  $\tilde{a}, \tilde{\alpha}, \tilde{A}$
- Matrices zijn *cursief* met een streepje onder het symbool, bijvoorbeeld:  $\underline{a}, \underline{\alpha}, \underline{A}$
- Cijfers zijn normaal, bijvoorbeeld : 1, 2

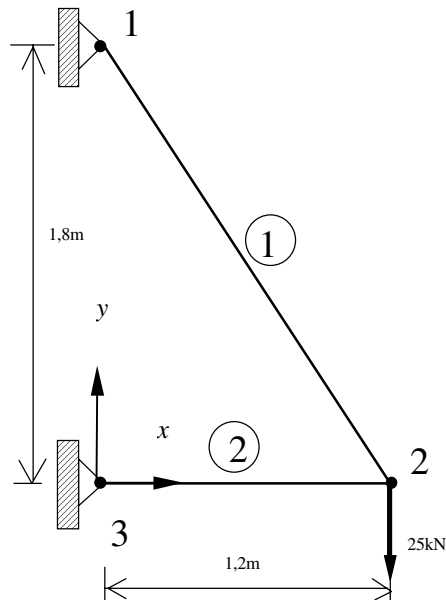
# Hoofdstuk 1

## Staaf- en balkconstructies

### 1.1 Een eenvoudig voorbeeld van de e.e.m. werkwijze met staafelementen

We beginnen met een zeer eenvoudig concreet voorbeeld.

Beschouw de constructie bestaande uit 2 staven die scharnierend met elkaar en de buitenwereld zijn verbonden zoals weergegeven in onderstaande figuur.



Deze constructie bestaat uit twee staafelementen 1 en 2. De constructie heeft 3 knooppunten 1,2 en 3. De gegevens zijn als volgt samen te vatten.

#### Knooppuntgegevens (S.I. eenheden)

Knoopnr.	coördinaten		Voorgeschreven verplaatsingen		Voorgeschreven krachten	
	x	y	x-richting	y-richting	x-richting	y-richting
1	0	1,8	0	0		
2	1,2	0			0	-25000
3	0	0	0	0		

#### Elementgegevens (S.I. eenheden)

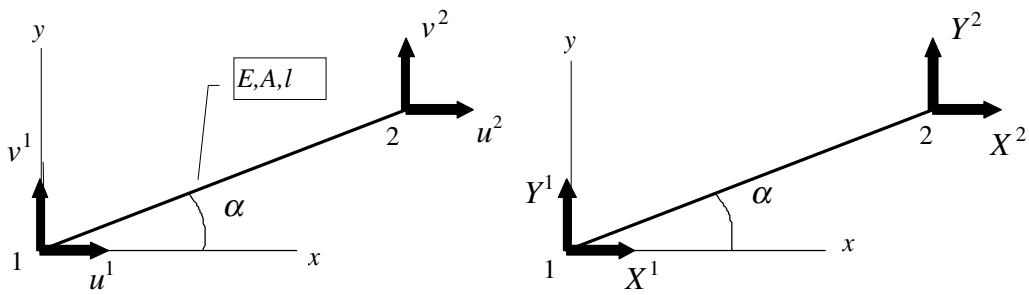
Elementnr.	Opp. A van de dwarsdoorsnede	E-modulus	Verbindingsknooppunten	Element lengte $l^s$	De hoek $\alpha$ met de x-as $^s$
1	$3,25 \cdot 10^{-4}$	$2,07 \cdot 10^{11}$	1 2	2,163	$-56,3^0$
2	$3,25 \cdot 10^{-4}$	$2,07 \cdot 10^{11}$	3 2	1,2	0

<sup>s</sup> Te berekenen uit de coördinaten van de verbindingsknooppunten.

We beschouwen de elementen als 2-D staafelementen.

Voor een tweeknoops 2-D staafelement definiëren we de knooppuntsverplaatsingen en knooppuntskrachten zoals in onderstaande figuur is weergegeven.





Knooppuntsverplaatsingen

Knooppuntskrachten

Uit de eerstejaars vakken mechanica is bekend dat voor zo'n element dat een hoek  $\alpha$  maakt met de horizontale positieve  $x$ -as geldt:

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \\ u^2 \\ v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^1 \\ Y^1 \\ X^2 \\ Y^2 \end{bmatrix} \quad \text{met } c = \cos(\alpha) \text{ en } s = \sin(\alpha)$$

Hierin is  $E$  de elasticiteitsmodulus van het materiaal,  $A$  het oppervlak van de dwarsdoorsnede en  $l$  de lengte van het staafelement.

We definiëren de stijfheidsmatrix  $\underline{K}$ , de kolom met knooppuntsverplaatsingen  $\underline{u}$  en de kolom met knooppuntskrachten  $\underline{f}$  als:

$$\underline{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \\ u^2 \\ v^2 \end{bmatrix} \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} X^1 \\ Y^1 \\ X^2 \\ Y^2 \end{bmatrix}$$

De rechtboven indices duiden het knooppuntsnummer aan.

En hiermede kunnen we het lineaire stelsel vergelijkingen bij ieder element kort schrijven als:

$$\underline{K} \underline{u} = \underline{f}$$

We bepalen deze stelsels vervolgens voor alle elementen in de constructie.

In ons concrete voorbeeld bepalen we dus

$${}^e \underline{K} {}^e \underline{u} = {}^e \underline{f} \quad e = 1, 2$$

De linksboven index geeft het elementnummer weer.

De stijfheidsmatrix van element 1 kan dan geschreven worden als:

$${}^1\underline{K} = \begin{bmatrix} {}^1K_{11} & {}^1K_{12} & {}^1K_{13} & {}^1K_{14} \\ {}^1K_{21} & {}^1K_{22} & {}^1K_{23} & {}^1K_{24} \\ {}^1K_{31} & {}^1K_{32} & {}^1K_{33} & {}^1K_{34} \\ {}^1K_{41} & {}^1K_{42} & {}^1K_{43} & {}^1K_{44} \end{bmatrix} \text{ of } \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}$$

We kunnen het stelsel ook als volgt in geëxpandeerde vorm opschrijven:

$$\begin{bmatrix} {}^1K_{11} & {}^1K_{12} & {}^1K_{13} & {}^1K_{14} & 0 & 0 \\ {}^1K_{21} & {}^1K_{22} & {}^1K_{23} & {}^1K_{24} & 0 & 0 \\ {}^1K_{31} & {}^1K_{32} & {}^1K_{33} & {}^1K_{34} & 0 & 0 \\ {}^1K_{41} & {}^1K_{42} & {}^1K_{43} & {}^1K_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \\ u^2 \\ v^2 \\ u^3 \\ v^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1X^1 \\ {}^1Y^1 \\ {}^1X^2 \\ {}^1Y^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De linksboven index  $a$  duidt op de globale nummering van de knooppuntsgrootheden in de geassembleerde constructie.

De stijfheidsmatrix van element 2 is:

$${}^2\underline{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}$$

Het stelsel bij element 2 ziet er in geëxpandeerde vorm als volgt uit:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^2K_{33} & {}^2K_{34} & {}^2K_{31} & {}^2K_{32} \\ 0 & 0 & {}^2K_{43} & {}^2K_{44} & {}^2K_{41} & {}^2K_{42} \\ 0 & 0 & {}^2K_{13} & {}^2K_{14} & {}^2K_{11} & {}^2K_{12} \\ 0 & 0 & {}^2K_{23} & {}^2K_{24} & {}^2K_{21} & {}^2K_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \\ u^2 \\ v^2 \\ u^3 \\ v^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^2X^2 \\ {}^2Y^2 \\ {}^2X^1 \\ {}^2Y^1 \end{bmatrix}$$

Als we nu de twee geëxpandeerde stelsels van de elementen 1 en 2 bij elkaar optellen (assembleren) krijgen we:

$$\begin{bmatrix} {}^1K_{11} & {}^1K_{12} & {}^1K_{13} & {}^1K_{14} & 0 & 0 \\ {}^1K_{21} & {}^1K_{22} & {}^1K_{23} & {}^1K_{24} & 0 & 0 \\ {}^1K_{31} & {}^1K_{32} & {}^1K_{33} + {}^2K_{33} & {}^1K_{34} + {}^2K_{34} & {}^2K_{31} & {}^2K_{32} \\ {}^1K_{41} & {}^1K_{42} & {}^1K_{43} + {}^2K_{43} & {}^1K_{44} + {}^2K_{44} & {}^2K_{41} & {}^2K_{42} \\ 0 & 0 & {}^2K_{13} & {}^2K_{14} & {}^2K_{11} & {}^2K_{12} \\ 0 & 0 & {}^2K_{23} & {}^2K_{24} & {}^2K_{21} & {}^2K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \\ u^2 \\ v^2 \\ u^3 \\ v^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1X^1 \\ {}^1Y^1 \\ {}^1X^2 + {}^2X^2 \\ {}^1Y^2 + {}^2Y^2 \\ {}^2X^1 \\ {}^2Y^1 \end{bmatrix}$$

We noemen de som van de geëxpandeerde matrices de geassembleerde stijfheidsmatrix  ${}^a\mathbf{K}$ . In dit geval luidt deze:

$${}^a\mathbf{K} = \begin{bmatrix} {}^1K_{11} & {}^1K_{12} & {}^1K_{13} & {}^1K_{14} & 0 & 0 \\ {}^1K_{21} & {}^1K_{22} & {}^1K_{23} & {}^1K_{24} & 0 & 0 \\ {}^1K_{31} & {}^1K_{32} & {}^1K_{33} + {}^2K_{33} & {}^1K_{34} + {}^2K_{34} & {}^2K_{31} & {}^2K_{32} \\ {}^1K_{41} & {}^1K_{42} & {}^1K_{43} + {}^2K_{43} & {}^1K_{44} + {}^2K_{44} & {}^2K_{41} & {}^2K_{42} \\ 0 & 0 & {}^2K_{13} & {}^2K_{14} & {}^2K_{11} & {}^2K_{12} \\ 0 & 0 & {}^2K_{23} & {}^2K_{24} & {}^2K_{21} & {}^2K_{22} \end{bmatrix}$$

In dit geval luidt de zogenaamde geassembleerde verplaatsingskolom  ${}^a\mathbf{u}$

$${}^a\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \\ u^2 \\ v^2 \\ u^3 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

en de geassembleerde krachtenkolom  ${}^a\mathbf{f}$

$${}^a\mathbf{f} = \begin{bmatrix} X^1 \\ Y^1 \\ X^2 \\ Y^2 \\ X^3 \\ Y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1X^1 \\ {}^1Y^1 \\ {}^1X^2 + {}^2X^2 \\ {}^1Y^2 + {}^2Y^2 \\ {}^2X^1 \\ {}^2Y^1 \end{bmatrix}$$

Dus kunnen we het totale geassembleerde stelsel schrijven als:

$${}^a\mathbf{K} {}^a\mathbf{u} = {}^a\mathbf{f}$$

Als we alle bekende numerieke waarden invullen volgt hieruit:

$$10^7 * \begin{bmatrix} 0,9569 & -1,4353 & -0,9569 & 1,4353 & 0 & 0 \\ -1,4353 & 2,1529 & 1,4353 & -2,1529 & 0 & 0 \\ -0,9569 & 1,4353 & 6,5630 & -1,4353 & -5,6062 & 0 \\ 1,4353 & -2,1529 & -1,4353 & 2,1529 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5,6062 & 0 & 5,6062 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ u^2 \\ v^2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{matrix} \\ \\ \\ -25*10^3 \\ X^3 \\ Y^3 \end{matrix}$$

We zijn dus met de kennis over de vrijheidsgraden (verplaatsingen) waarmee elk element geassocieerd is, in staat om de componenten van de stijfheidsmatrices van alle elementen op de juiste plaats in het totale stelsel te plaatsen.

Het is evident dat dit proces voor veel elementen geautomatiseerd wordt.

Zonder gebruik te maken van een programmeertaal is het betrekkelijk lastig om het assemblage proces symbolisch te beschrijven. Met een "hogere programmeertaal" zoals bijvoorbeeld PC-Matlab is dat verrassend eenvoudig.

Het voor de oplossing van de onbekende verplaatsingen relevante deel van het geassembleerde stelsel is in dit concrete voorbeeld:

$$10^7 * \begin{bmatrix} 6,5630 & -1,4353 \\ -1,4353 & 2,1529 \end{bmatrix} \begin{matrix} u^2 \\ v^2 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ -25*10^3 \end{matrix}$$

en hieruit volgt:

$$\begin{matrix} u^2 \\ v^2 \end{matrix} = \begin{matrix} -0,00030 \\ -0,0014 \end{matrix}$$

Vervolgens kunnen de onbekende reactiekrachten worden uitgerekend met

$$\begin{matrix} X^1 \\ Y^1 \\ X^3 \\ Y^3 \end{matrix} = 10^7 \times \begin{bmatrix} -0,9569 & 1,4353 \\ 1,4353 & -2,1529 \\ -5,6062 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u^2 \\ v^2 \end{matrix} = 10^4 \times \begin{matrix} -1,6667 \\ 2,5 \\ 1,6667 \\ 0 \end{matrix}$$

Uit de nu bekende knooppuntsverplaatsingen kunnen de rekken in alle staven berekend worden, dus ook alle spanningen en staafkrachten.

In de volgende paragraaf wordt het in rekening brengen van de kinematische en dynamische randvoorwaarden algemener behandeld.

## 1.2 Numerieke aspecten bij het oplossingsproces

### 1.2.1 Het in rekening brengen van de randvoorwaarden

In het voorgaande is geschetst hoe de elementenmethode kan worden toegepast om voor een eenvoudig probleem een oplossing te bepalen. Het stelsel knooppuntsvergelijkingen dat uiteindelijk werd gevonden luidt:

$${}^a \underline{K} \tilde{u} = \tilde{f}$$

Ook bij geavanceerdere toepassing van de eindige elementen methode voor het vinden van benaderingsoplossingen zullen we in de volgende paragrafen zien dat het probleem uiteindelijk wordt beschreven met een lineair stelsel vergelijkingen van dezelfde vorm.

Hierin is  $\tilde{u}$  de kolom met de verplaatsingscomponenten van alle systeemknooppunten,  $\tilde{f}$  de

kolom met de componenten van de uitwendige knooppuntskrachten en  ${}^a \underline{K}$  de symmetrische systeemstijfheidsmatrix. In deze paragraaf zullen we ons bezighouden met enige aspecten van het (numerieke) proces, van belang voor de oplossing van de de onbekende verplaatsingscomponenten. Bij de afleiding van het bovenstaande stelsel systeemvergelijkingen hebben we nog geen rekening gehouden met de kinematische randvoorwaarden, dus met voorwaarden die tot uitdrukking brengen dat voor bepaalde knooppunten de verplaatsingen een voorgeschreven waarde (gelijk of ongelijk aan nul) hebben. Voor die knooppunten is de randbelasting onbekend; dit is de belasting, die nodig is om de voorgeschreven verplaatsingen te realiseren. In bovenstaand stelsel komt dit tot uitdrukking doordat een aantal componenten van de kolom  $\tilde{u}$  een bekende waarde krijgt terwijl de corresponderende componenten van kolom  $\tilde{f}$  onbekend zijn. Hierdoor is het niet mogelijk om met de gebruikelijke procedures voor het oplossen van standaard-vorm lineaire vergelijkingen te hanteren. We moeten daarom op een andere manier te werk gaan en het stelsel vergelijkingen overvoeren in een stelsel waarbij in het rechterlid uitsluitend bekende grootheden voorkomen.

#### 1.2.1.1 Hernummering van rijen en kolommen; permutatie

Door de hernummering van de componenten van  $\tilde{u}$  kan ervoor worden gezorgd dat  $\tilde{u}$  overgaat in een kolom  ${}^h \tilde{u}$ , waarin alle bekende componenten gegroepeerd zijn in de staart, terwijl alle onbekende componenten aan de kop zijn gerangschikt. Formeel kunnen we schrijven:

$${}^h \tilde{u} = \begin{bmatrix} u \\ \sim l \\ u \\ \sim p \\ u \\ \sim s \end{bmatrix}$$

Hierbij bevat kolom  $u_{\sim l}$  alle onbekende verplaatsingscomponenten,  $u_{\sim p}$  alle bekende verplaatsingscomponenten ongelijk aan nul en  $u_{\sim s}$  de onderdrukte componenten. De componenten van  ${}^a f$  worden op precies dezelfde manier hernummerd:

$${}^h f_{\sim} = \begin{bmatrix} f_{\sim l} \\ f_{\sim p} \\ f_{\sim s} \end{bmatrix}$$

De kolommen  $f_{\sim p}$  en  $f_{\sim s}$  bevatten als componenten de onbekende reactiekrachten. De componenten van  $f_{\sim l}$  zijn bekend en bepaald uit de voorgeschreven belasting die vertaald wordt naar knooppuntkrachten. De hernummering van de componenten van  ${}^a u_{\sim}$  en  ${}^a f_{\sim}$  heeft uiteraard ook gevolgen voor de stijfheidsmatrix  ${}^a \underline{K}$ . In een matrix-product van de vorm  ${}^a \underline{K} {}^a u_{\sim}$  mogen component  $i$  en component  $j$  van  ${}^a u_{\sim}$  verwisseld worden, als gelijktijdig verwisseling plaatsvindt van kolom  $i$  en kolom  $j$  van de matrix  ${}^a \underline{K}$ . Verder geldt dat component  $i$  en component  $j$  van  ${}^a f_{\sim}$  verwisseld mogen worden, als gelijktijdig rij  $i$  en rij  $j$  van  ${}^a \underline{K}$  verwisseld worden. De hernummering van de componenten van  ${}^a u_{\sim}$  en  ${}^a f_{\sim}$  moet dus gepaard gaan met een overeenkomstige hernummering van de kolommen en de rijen van de matrix  ${}^a \underline{K}$ . Dit leidt uiteindelijk tot het zogenaamde gepermuteerde en vervolgens gepartitioneerde stelsel:

$${}^h \underline{K}_{\sim} {}^h u_{\sim} = {}^h f_{\sim}$$

uitgeschreven volgens:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{ll} & \underline{K}_{lp} & \underline{K}_{ls} \\ \underline{K}_{pl} & \underline{K}_{pp} & \underline{K}_{ps} \\ \underline{K}_{sl} & \underline{K}_{sp} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\sim l} \\ u_{\sim p} \\ u_{\sim s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\sim l} \\ f_{\sim p} \\ f_{\sim s} \end{bmatrix}$$

Hierin zijn  $\underline{K}_{ij}$  ( $i = l, p, s$  en  $j = l, p, s$ ) deelmatrices. Aangezien de matrix  ${}^a \underline{K}$ , zoals we in het vervolg zullen zien net zoals in het eenvoudige voorbeeld met staven, symmetrisch is en de

matrix  ${}^h \underline{K}$  ontstaat door de rijen en de kolommen van  ${}^a \underline{K}$  op precies dezelfde wijze te hernummeren, zal ook de gepermuteerde matrix  ${}^h \underline{K}$  symmetrisch zijn. Derhalve geldt:

$$\underline{K}_{ji} = (\underline{K}_{ij})^T \quad (i = l, p, s \text{ en } j = l, p, s).$$

We kunnen het gepartitioneerde stelsel splitsen in drie stelsels vergelijkingen en we vinden dan de onbekende verplaatsingen uit de oplossing van het stelsel:

$$\underline{K}_{ll} u_{\sim l} = f_{\sim l} - \underline{K}_{lp} u_{\sim p}.$$

Vervolgens kunnen de onbekende reactiekrachten in  $f_{\sim p}$  en  $f_{\sim s}$  eenvoudig bepaald worden uit:

$$f_{\sim p} = \underline{K}_{pl} u_{\sim l} + \underline{K}_{pp} u_{\sim p} \quad \text{en} \quad f_{\sim s} = \underline{K}_{sl} u_{\sim l} + \underline{K}_{sp} u_{\sim p}.$$

De voorgaande bespreking zou de indruk kunnen wekken dat altijd eerst de matrix  ${}^a \underline{K}$  bepaald moet worden en dat daaruit vervolgens door hernummering van rijen en kolommen de deelmatrices  $\underline{K}_{ij}$  ( $i = l, p, s$  en  $j = l, p, s$ ) bepaald worden. Bij het samenstellen van de elementstijfheidsmatrices tot de systeemstijfheidsmatrix kan echter eenvoudig rekening gehouden worden met deze hernummering en kunnen de deelmatrices direct worden bepaald. Hierdoor kan bij verwerking op een rekenmachine veel geheugenruimte worden bespaard en dat is een groot voordeel.

Zodra  $u_{\sim l}$  bekend is, zijn alle componenten van de kolom  ${}^h u_{\sim}$  bekend. Dit impliceert dat de verplaatsingscomponenten voor ieder systeemknooppunt (en dus ook voor ieder knooppunt van elk element) bekend zijn. Ook kunnen dan bij bekende of veronderstelde verplaatsingsvelden binnen de elementen, de verplaatsingen en de rekken in ieder punt binnen elk element bepaald worden. Vervolgens kunnen met de constitutieve vergelijkingen de relevante spanningsgrootheden worden berekend. Indien gewenst, kunnen bovendien andere grootheden bepaald worden, zoals de kolom van de inwendige krachten op de knooppunten van een element, lijnen waarop een spanningsgrootheid (bijvoorbeeld de ideële spanning) constant is etc..

### 1.2.1.2 Alternatieve verwerking van de kinematische randvoorwaarden

De kinematische randvoorwaarden kunnen ook op een andere manier verwerkt worden. Dit zal aan de hand van een voorbeeld worden toegelicht. Stel dat we aanvankelijk het volgende stelsel van 6 vergelijkingen hebben:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & \dots & \dots & K_{16} \\ \dots & K_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & K_{33} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & K_{44} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & K_{55} & \dots \\ K_{61} & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ 3 \\ 7 \\ u^5 \\ u^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ f^3 \\ f^4 \\ 150 \\ 300 \end{bmatrix}$$

De kinematische randvoorwaarden zijn dus :  $u^3 = 3$ ;  $u^4 = 7$ .

Er wordt dan op de 3<sup>e</sup> en de 4<sup>e</sup> plaats op de hoofddiagonaal van de stijfheidsmatrix een extreem groot getal  $\alpha$  gezet, de kolom met vrijheidsgraden wordt geheel onbekend verondersteld en op de 3<sup>e</sup> en de 4<sup>e</sup> plaats van de kolom in het rechterlid wordt  $3\alpha$  respectievelijk  $7\alpha$  gezet. De derde en vierde vergelijking zien er dan als volgt uit:

$$\alpha u^3 + \delta_1 = 3\alpha \text{ met } \delta_1 \ll \alpha u^3$$

$$\alpha u^4 + \delta_2 = 7\alpha \text{ met } \delta_2 \ll \alpha u^4$$

waarmee de kinematische randvoorwaarden worden benaderd door het stelsel:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & \dots & \dots & K_{16} \\ \dots & K_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \alpha & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \alpha & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & K_{55} & \dots \\ K_{61} & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ u^5 \\ u^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 3\alpha \\ 7\alpha \\ 150 \\ 300 \end{bmatrix}$$

met een geheel “onbekend” linkerlid en een geheel bekend rechterlid. De onbekende kolom in het linkerlid kan nu rechtstreeks bepaald worden. Vervolgens kunnen met de 3<sup>e</sup> en 4<sup>e</sup> vergelijking uit het oorspronkelijke stelsel de onbekende reactiekrachten  $f^3$  en  $f^4$  bepaald worden.

### 1.2.2 De verplaatsing als star lichaam

De mogelijkheid om de onbekende verplaatsingscomponenten  $u_{\sim l}$  te berekenen staat of valt met de regulariteit van de vierkante symmetrische matrix  $\underline{K}_{ll}$ .

Deze matrix is regulier dan en slechts dan als voor iedere kolom  $u_{\sim l} \neq 0$  (0 is een kolom met nullen) geldt  $\underline{K}_{ll} u_{\sim l} \neq 0$ . Anders gezegd:  $\underline{K}_{ll}$  is niet regulier (dus singulier) als er een kolom  $u_{\sim l} \neq 0$  bestaat zodanig dat  $\underline{K}_{ll} u_{\sim l} = 0$ .

We nemen nu aan dat alle voorgeschreven verplaatsingscomponenten gelijk zijn aan nul ( $u_{\sim p}$  is een lege kolom). Voor de geldigheid van de nu volgende beschouwingen met betrekking tot de regulariteit van  $\underline{K}_{ll}$  is dit geen beperking. Er geldt nu:

$$\underline{K}_{ll} u_{\sim l} = f_{\sim l}$$

Als er een  $u_{\sim l} \neq 0$  bestaat waarvoor  $\underline{K}_{ll} u_{\sim l} = 0$  en dus  $f_{\sim l} = 0$ , dan zijn er dus verplaatsingen van de knooppunten mogelijk terwijl er voor het realiseren van die verplaatsingen geen uitwendige belasting nodig is. De constructie voert dan (ondanks het onderdrukken van alle verplaatsingscomponenten in  $u_{\sim s}$ , dus ondanks het opleggen van de voorwaarde  $u_{\sim s} = 0$ ) een



verplaatsing uit, gerepresenteerd door  $\underline{u} \neq \underline{0}$  terwijl  $\underline{f} = \underline{0}$ . We kunnen hieruit concluderen dat  $\underline{K}_{ll}$  regulier is dan en slechts dan als de beschouwde constructie na het voorschrijven van de verplaatsingscomponenten, die zijn opgeslagen in  ${}^a \underline{u}$ , geen enkele verplaatsing meer kan uitvoeren als star lichaam. Voor het kunnen oplossen van de onbekende vrijheidsgraden  $\underline{u}$  moeten dus tenminste zoveel verplaatsingscomponenten worden voorgeschreven dat iedere starre verplaatsing wordt onderdrukt. Dit is een zeer essentieel aspect bij de toepassing van de elementenmethode voor de analyse van het statisch gedrag van constructies.

### 1.2.3 Eigenschappen van de stijfheidsmatrix

We veronderstellen in hetgeen volgt dat de matrix  $\underline{K}_{ll}$  regulier is. Anders gezegd: we veronderstellen dat het lichaam geen starre verplaatsing kan uitvoeren. De stijfheidsmatrix  ${}^a \underline{K}$  is, zoals we later zullen aantonen, altijd symmetrisch. De door de knooppuntkrachten verrichte arbeid leidt altijd tot een positieve elastische energie. Dus geldt:

$$\frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{a} \underline{f} = \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{a} \underline{K} \underline{u} \geq 0 \quad \forall \underline{u} \neq \underline{0}$$

Hieruit blijkt dus dat we op weliswaar fysische gronden kunnen stellen dat  ${}^a \underline{K}$  ook semi-positief definitief is. Daaruit volgt onmiddellijk dat  $\underline{K}_{ll}$  ook minstens semi-positief definitief is, m.a.w. dat geldt:

$$\underline{u}^T \underline{K}_{ll} \underline{u} \geq 0 \quad \forall \underline{u}$$

Aangezien  $\underline{K}_{ll}$  regulier is (dus  $\underline{K}_{ll} \underline{u} \neq \underline{0}$  voor alle  $\underline{u} \neq \underline{0}$ ) volgt bovendien dat  $\underline{K}_{ll}$  niet slechts semi-positief definitief maar zelfs positief definitief is, met andere woorden:

$$\underline{u}^T \underline{K}_{ll} \underline{u} > 0 \quad \forall \underline{u} \neq \underline{0}.$$

Samenvattend kunnen we stellen dat met betrekking tot  $\underline{K}_{ll}$  geldt:

- $\underline{K}_{ll}$  is symmetrisch
- $\underline{K}_{ll}$  is regulier
- $\underline{K}_{ll}$  is positief definitief
- $\underline{K}_{ll}$  is een bandmatrix met een bandbreedte die afhankelijk is van de nummering van de knooppunten.

Van deze eigenschappen kan met veel voordeel gebruik worden gemaakt bij het oplossen van  $\underline{u}$ . In deze cursus is het niet de bedoeling om uitgebreid in te gaan op de vele oplossingsprocedures die beschikbaar zijn voor het oplossen van lineaire stelsels vergelijkingen waarin deze eigenschappen worden uitgebuit.

### 1.3 Een 3-D balkelement als voorbeeld van een structureel element

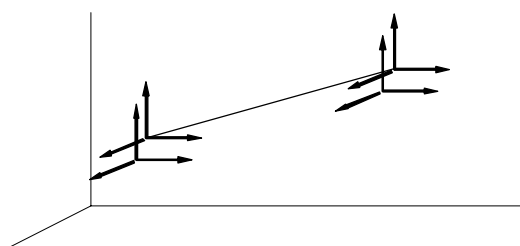
In veel gevallen wordt niet altijd uitgegaan van de algemene drie dimensionale elasticiteitstheorie maar van een bijzondere theorie waarbij a priori bepaalde veronderstellingen gemaakt worden over het verplaatsingsveld en/of het spanningsveld. Zo'n bijzondere theorie levert dan dankzij de veronderstellingen een eenvoudige oplossing.

Zo is in paragraaf 1.1 uitgegaan van een staventheorie .

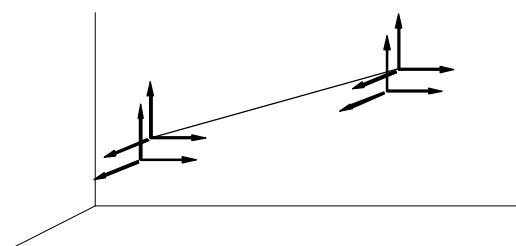
In deze paragraaf wordt uitgegaan van de buigbalkentheorie en de torsiestaventheorie, en in het volgende hoofdstuk zullen we de vlakspanningstheorie tegenkomen. Zo zijn er nog vele andere bijzondere theorieën zoals de vlakvervormingstheorie, de platen- en schalentheorie, de theorie voor axisymmetrische constructies met axisymmetrische belasting, enz. Bij ieder van deze theorieën hoort een eindige elementenformulering.

Het voert te ver om al deze theorieën binnen het kader van deze cursus te behandelen maar de meest gebruikte en eenvoudige zullen we behandelen.

We kiezen in deze paragraaf voor 3-D balkenconstructies en de afleiding van de eindige elementenformulering voor een 3-D balkelement. Dit element wordt een structureel element genoemd omdat zo'n element in het algemeen een op zich zelf staand constructie-onderdeel vormt. Een 3-D balkelement is een prismatisch element waarvan de lengte veel groter is dan de afmetingen loodrecht daarop, en dat stijfheid heeft met betrekking tot trek en druk, buiging en torsie. Daarom zullen achtereenvolgens de eindige element formuleringen voor een staafelement, een buigbalk en een torsiestaaaf worden afgeleid. Vervolgens worden deze voor een 3-D balkelement gecombineerd.



verplaatsingen en hoekverdraaiingen



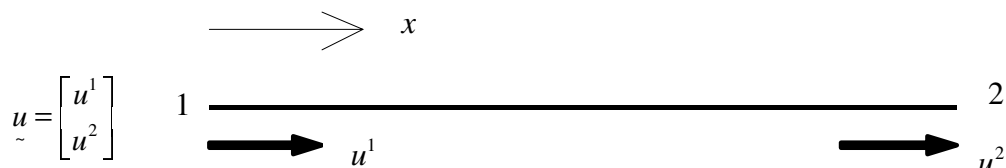
krachten en momenten

### 1.3.1 Een eenvoudig tweeknoops staafelement

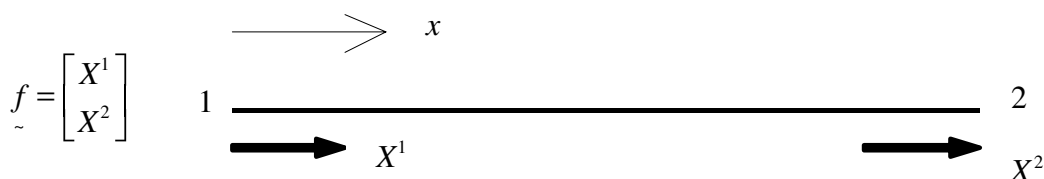
We beschouwen een 1-D staafelement met lengte  $l$  en 2 knooppunten in een lokaal Cartesisch  $x, y, z$  assenstelsel. We positioneren het staafelement met zijn lengteas langs de  $x$ - as, knooppunt 1 op  $x = 0$  en knooppunt 2 op  $x = l$ .

De elasticiteitsmodulus van het materiaal is  $E$ . De oppervlakte van de dwarsdoorsnede van de staaf is  $A$ .

De kolom met knooppuntsverplaatsingen van de knooppunten 1 en 2 in de positieve  $x$ -richting is gedefinieerd als



De kolom met knooppuntskrachten op de knooppunten 1 en 2 in de positieve  $x$ -richting is gedefinieerd als



Eenvoudig is met eerstejaars mechanica af te leiden dat er een lineaire relatie is tussen de kolom met knooppuntsverplaatsingen en de kolom met knooppuntskrachten:

$$\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{u} \quad \text{met} \quad \underset{\sim}{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 1.3.2 Een eenvoudig tweeknoops 3-D buigbalelement (Bernoulli)

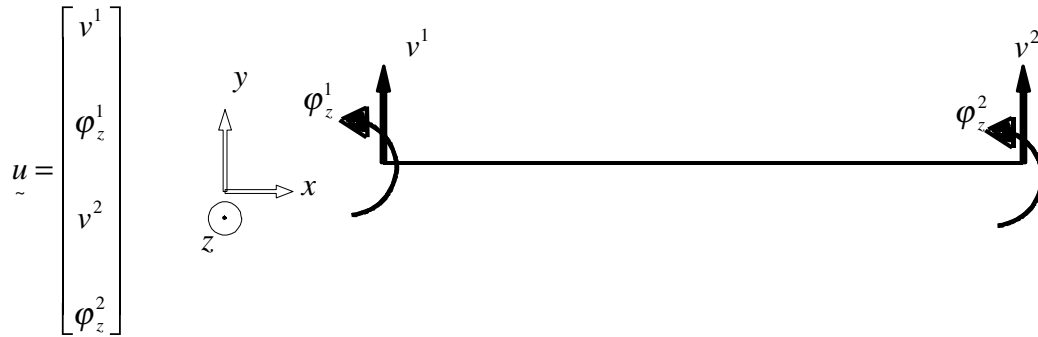
We beschouwen een 3-D balelement met lengte  $l$  en 2 knooppunten in een Cartesisch  $x, y, z$  assenstelsel. We positioneren het staafelement met zijn lengteas langs de  $x$ - as, knooppunt 1 op  $x = 0$  en knooppunt 2 op  $x = l$ .

De elasticiteitsmodulus van het materiaal is  $E$ . De kwadratische oppervlaktemomenten om de  $y$ -as respectievelijk de  $z$ -as zijn  $I_y$  en  $I_z$ . We gaan er vanuit dat de  $y$ -en de  $z$ -as hoofdassen zijn en dat dus geldt:  $I_{yz} = 0$ .

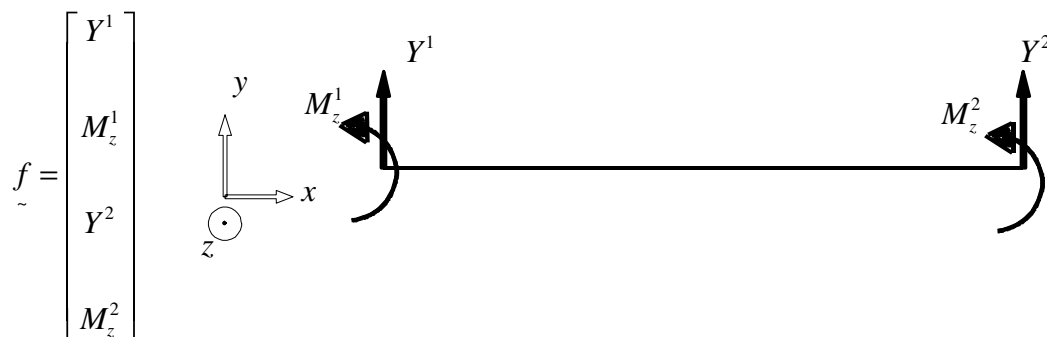
Beschouw eerst buiging om de  $z$ -as (in het  $xy$ - vlak).

• **Buiging om de z-as**

We definiëren een kolom met elementknooppuntsverplaatsingen waarin naast de verplaatsingen  $v^1$  en  $v^2$  in de y-richting van de knooppunten 1 en 2 ook de hoekverdraaiingen om de z-as  $\varphi_z^1$  en  $\varphi_z^2$  in die knooppunten als vrijheidsgraden voorkomen:



Verder definiëren we de kolom met elementknooppuntskrachten waarin naast de verticale krachten in de y-richting in de knooppunten 1 en 2,  $Y^1$  en  $Y^2$  ook de momenten in die knooppunten  $M_z^1$  en  $M_z^2$  voorkomen:



Met behulp van de vergeetmijnetjes zien we dan onmiddellijk dat geldt:

$$\begin{bmatrix} v^2 - v^1 - \varphi_z^1 l \\ \varphi_z^2 - \varphi_z^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{3EI_z} & \frac{l^2}{2EI_z} \\ \frac{l^2}{2EI_z} & \frac{l}{EI_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^2 \\ M_z^2 \end{bmatrix}$$

En invertering van deze matrixrelatie levert:

$$\begin{bmatrix} Y^2 \\ M_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{-6EI_z}{l^2} \\ \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^2 - v^1 - \varphi_z^1 l \\ \varphi_z^2 - \varphi_z^1 \end{bmatrix}$$

Vanwege het evenwicht van krachten en momenten geldt ook:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} Y^1 \\ M_z^1 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} Y^2 \\ M_z^2 + Y^2 l \end{bmatrix} \\
&= - \left\{ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{-6EI_z}{l^2} \\ \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{12EI_z}{l^2} & \frac{-6EI_z}{l} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} v^2 - v^1 - \varphi_z^1 l \\ \varphi_z^2 - \varphi_z^1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{-12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^2 - v^1 - \varphi_z^1 l \\ \varphi_z^2 - \varphi_z^1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Voor de kolom met elementknooppuntkrachten geldt dan dus:

$$\begin{bmatrix} Y^1 \\ M_z^1 \\ Y^2 \\ M_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \\ \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{-6EI_z}{l^2} \\ \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^2 - v^1 - \varphi_z^1 l \\ \varphi_z^2 - \varphi_z^1 \end{bmatrix}$$

of anders geschreven:

$$\begin{bmatrix} Y^1 \\ M_z^1 \\ Y^2 \\ M_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{-12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} & \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \\ \frac{-12EI_z}{l^3} & \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{-6EI_z}{l^2} \\ \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} & \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \varphi_z^1 \\ v^2 \\ \varphi_z^2 \end{bmatrix}$$

We definiëren de elementstijfheidsmatrix  $\underline{K}$  met:

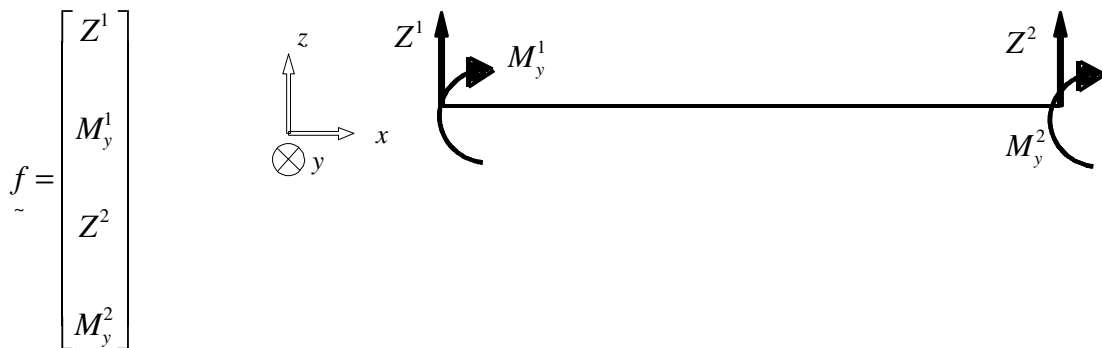
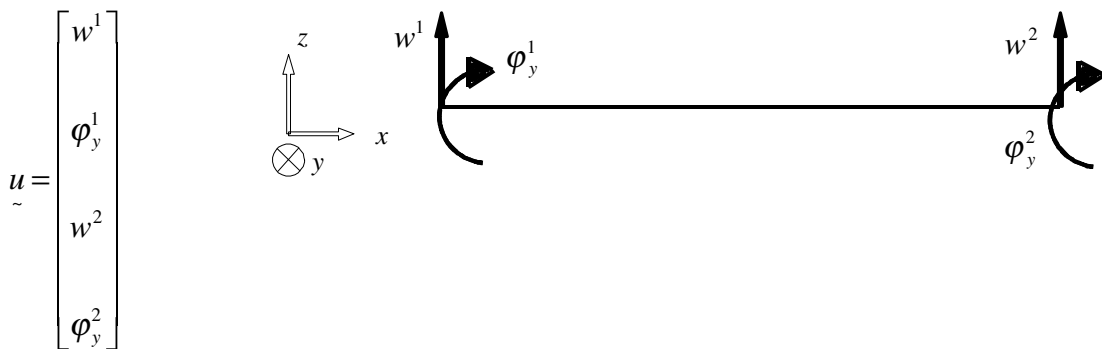
$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{-12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} & \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \\ \frac{-12EI_z}{l^3} & \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{-6EI_z}{l^2} \\ \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} & \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}$$

Dan kunnen we de relatie tussen de knooppuntskrachten en de verplaatsingen voor dit element weer schrijven als:

$$\underline{K} \underline{u} = \underline{f}$$

• **Buiging om de y-as**

Bij buiging om de lokale y-as kunnen we eveneens een kolom met knooppuntverplaatsingen  $\underline{u}$  en een kolom met knooppuntskrachten definiëren met:



Hierin zijn  $w^1$  en  $w^2$  knooppuntverplaatsingen in de z-richting en  $\varphi_y^1$  en  $\varphi_y^2$  hoekverdraaiingen om de y-as.

Volkomen analoog aan het geval met buiging om de z-as vinden we nu weer:

$$\underline{K} \underline{u} = \underline{f}$$

Maar in dit geval geldt dan:

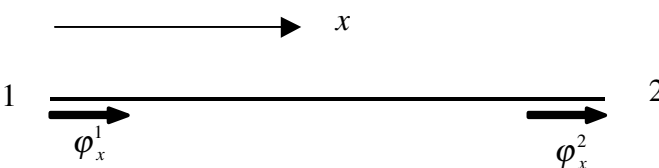
$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{l^3} & \frac{-6EI_y}{l^2} & \frac{-12EI_y}{l^3} & \frac{-6EI_y}{l^2} \\ \frac{-6EI_y}{l^2} & \frac{4EI_y}{l} & \frac{6EI_y}{l^2} & \frac{2EI_y}{l} \\ \frac{-12EI_y}{l^3} & \frac{6EI_y}{l^2} & \frac{12EI_y}{l^3} & \frac{6EI_y}{l^2} \\ \frac{-6EI_y}{l^2} & \frac{2EI_y}{l} & \frac{6EI_y}{l^2} & \frac{4EI_y}{l} \end{bmatrix}$$

### 1.3.3 Een eenvoudig torsiebalkelement

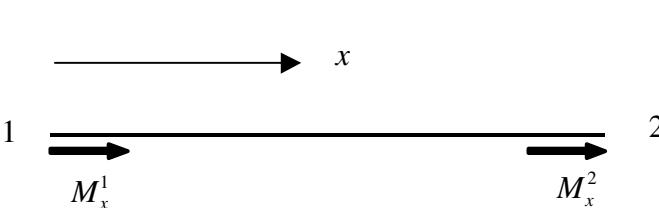
Ook voor een eenvoudig torsiebalkelement volgens De Saint Venant<sup>1</sup> is de stijfheidsmatrix eenvoudig af te leiden.

Beschouw hiertoe een torsiebalkelement in een  $x, y, z$  assenstelsel. We positioneren het balkelement met zijn lengte-as langs de  $x$ - as. Knooppunt 1 op  $x = 0$  en knooppunt 2 op  $x = l$ . Het effectieve polaire oppervlaktmoment is  $J_t$  en de glijdingsmodulus is  $G$ .

We definiëren nu een knooppuntsverplaatsingskolom waarin de axiale hoekverdraaiingen  $\varphi_x^1$  en  $\varphi_x^2$  van de knooppunten om de positieve  $x$ - as voorkomen:

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} \varphi_x^1 \\ \varphi_x^2 \end{bmatrix}$$


We definiëren de knooppuntskrachtenkolom waarin de torsiemomenten  $M_x^1$  en  $M_x^2$  om de positieve  $x$ - as op de knooppunten voorkomen:

$$\tilde{f} = \begin{bmatrix} M_x^1 \\ M_x^2 \end{bmatrix}$$


Eenvoudig is nu af te leiden dat voor de relatie tussen  $\tilde{u}$  en  $\tilde{f}$  geldt:

$$\underline{K} \tilde{u} = \tilde{f}$$

met  $\underline{K} = \frac{GJ_t}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

### 1.3.4 Een eenvoudig 3-D frame-element

<sup>1</sup> De theorie zoals die in het eerstejaars mechanica boek/dictaat is behandeld.

Een 3-D frame-element is een combinatie van een staafelement, een 3-D buigbalkelement en een torsie-element

De verplaatsingskolom is nu gedefinieerd als:

$$\tilde{u} = \left[ u^1 \quad v^1 \quad w^1 \quad \varphi_x^1 \quad \varphi_y^1 \quad \varphi_z^1 \quad u^2 \quad v^2 \quad w^2 \quad \varphi_x^2 \quad \varphi_y^2 \quad \varphi_z^2 \right]^T$$

en de overeenkomstige krachtenkolom als

$$\tilde{f} = \left[ X^1 \quad Y^1 \quad Z^1 \quad M_x^1 \quad M_y^1 \quad M_z^1 \quad X^2 \quad Y^2 \quad Z^2 \quad M_x^2 \quad M_y^2 \quad M_z^2 \right]^T$$

Er geldt nu weer een lineaire relatie tussen  $\tilde{u}$  en  $\tilde{f}$  volgens

$$\tilde{K} \tilde{u} = \tilde{f}$$

Eenvoudig is in te zien dat nu geldt:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{-12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\ \frac{-EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ_t}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}$$

Zo'n 3-D frame-element is meestal gelegen in een globaal Cartesisch  $\{x, y, z\}$  waarvan de richtingen niet samenvallen met de lokale  $\{x, y, z\}$  assen uit de vorige paragrafen.

Daarom zouden we het frame-element eigenlijk in een lokaal  $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$  moeten formuleren met een verplaatsingskolom  $\tilde{\bar{u}}$  en een krachtenkolom  $\tilde{\bar{f}}$  in dat lokale assenstelsel. Er geldt dan uiteraard

$$\tilde{\bar{K}} \tilde{\bar{u}} = \tilde{\bar{f}}$$

Met  $\tilde{\bar{K}}$ ,  $\tilde{\bar{u}}$  en  $\tilde{\bar{f}}$  identiek aan bovenstaande uitdrukking voor  $\tilde{K}$ ,  $\tilde{u}$  en  $\tilde{f}$  maar met de indices  $x, y$  en  $z$  vervangen door  $\bar{x}, \bar{y}$  en  $\bar{z}$ .



We willen in verband met de latere assemblage van de elementen tot de te analyseren balkenconstructie uiteraard alle grootheden betrekken op het globale assenstelsel. Bij de overgang naar een globaal assenstelsel definiëren we per element een rotatiematrix  $\underline{R}$  volgens:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \underline{T} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{T} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{T} \end{bmatrix} \text{ met } \underline{T} = \begin{bmatrix} c_{x\bar{x}} & c_{y\bar{x}} & c_{z\bar{x}} \\ c_{x\bar{y}} & c_{y\bar{y}} & c_{z\bar{y}} \\ c_{x\bar{z}} & c_{y\bar{z}} & c_{z\bar{z}} \end{bmatrix} \text{ en } \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hierin is bijvoorbeeld de component  $c_{x\bar{y}}$  de cosinus van de hoek tussen de globale  $x$ -as en de lokale  $\bar{y}$ -as, etc. De ontbinding van de componenten van  $\underline{u}$  in de lokale  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  en  $\bar{z}$  richtingen levert de componenten van  $\bar{\underline{u}}$  volgens:

$$\bar{\underline{u}} = \underline{R} \underline{u}$$

Voor de krachtenkolom in het globale  $x,y,z$  assenstelsel geldt:

$$\underline{f} = \underline{R}^T \bar{\underline{f}}$$

Er geldt dus:

$$\underline{f} = \underline{R}^T \bar{\underline{K}} \bar{\underline{u}} = \underline{R}^T \bar{\underline{K}} \underline{R} \underline{u}$$

We definiëren nu de stijfheidsmatrix in het globale assenstelsel  $\underline{K}$  als:

$$\underline{K} = \underline{R}^T \bar{\underline{K}} \underline{R}$$

Dan geldt dus uiteindelijk in het globale assenstelsel:

$$\underline{K} \underline{u} = \underline{f}$$

# Hoofdstuk 2

## De geometrisch en fysisch lineaire elasticiteitstheorie

### 2.1 Discrete- versus continuümselementen

Indien we een probleem niet kunnen modelleren met discrete elementen, bijvoorbeeld balkelementen, dan wordt de continuümmechanica als uitgangspunt gekozen voor de eindige elementen formulering. We zullen ons hierbij beperken tot de twee meest voorkomende gevallen. Dit zijn de algemene 3-D continuümformulering en de vlakspanningsformulering, in de lineaire elasticiteitsleer.

### 2.2 De 3-D continuümformulering

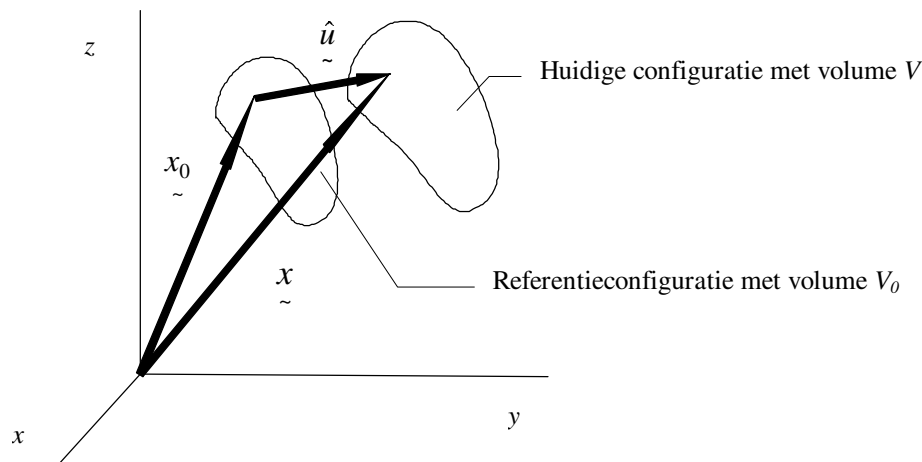
#### 2.2.1 Kinematica

Beschouw een willekeurig deelvolume van een constructie in de ruimte met een orthonormaal Cartesisch assenstelsel  $\{x, y, z\}$ . Ieder materieel punt wordt geïdentificeerd met de positiekolom

$\underline{x}_{\sim 0} = [x_0 \quad y_0 \quad z_0]^T$  in de onvervormde referentieconfiguratie. Voor ieder materieel punt  $\underline{x}_{\sim 0}$  is de momentane toestand op tijdstip  $t$  volledig bepaald door de kolom met posities

$\underline{x}(\underline{x}_{\sim 0}, t) = [x \quad y \quad z]^T$ . De ruimtelijke gradiënt van deze posities is bepalend voor de rekken  $\underline{\varepsilon}(\underline{x}_{\sim 0}, t)$ , en met de constitutieve vergelijkingen kunnen de spanningen  $\underline{\sigma}(\underline{x}_{\sim 0}, t)$  in de rekken worden uitgedrukt. De kolom  $\hat{\underline{u}}$  met verplaatsingen van een materieel punt in respectievelijk de  $x$ ,  $y$  en  $z$  richting is gedefinieerd als:

$$\hat{\underline{u}}(\underline{x}_{\sim 0}, t) = [u \quad v \quad w]^T = \underline{x}(\underline{x}_{\sim 0}, t) - \underline{x}_{\sim 0} \quad *$$



\* Het dakje  $\hat{\underline{u}}$  boven de  $\underline{u}$  duidt er op dat deze grootheid afhangt van  $\underline{x}_{\sim 0}$ . Het symbool  $\underline{u}$  krijgt later een heel andere betekenis.

De 6 rekcomponenten worden volgens de in de lineaire elasticiteitsleer ( d.w.z. kleine deformaties en kleine rotaties) gebruikelijke definities in een kolom  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  gezet volgens:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \left[ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right]^T = \underline{\underline{\partial}}_0 \hat{\underline{\underline{u}}}$$

Hierin is de matrix met gradiëntoperatoren  $\underline{\underline{\partial}}_0$  gedefinieerd als:

$$\underline{\underline{\partial}}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z_0} \\ \frac{\partial}{\partial y_0} & \frac{\partial}{\partial x_0} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z_0} & \frac{\partial}{\partial y_0} \\ \frac{\partial}{\partial z_0} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_0} \end{bmatrix}$$

### 2.2.2 Constitutieve vergelijkingen

De 6 spanningscomponenten worden in een kolom met spanningen  $\underline{\underline{\sigma}}$  gezet volgens:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left[ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \right]^T$$

Hierin is  $\sigma_{xx}$  de normaalspanning op een vlakje met buitennormaal in de x-richting en  $\tau_{xy}$  een schuifspanning in de x-richting op een vlakje met buitennormaal in de y-richting of vanwege het momentenevenwicht precies omgekeerd.

Volgens de wet van Hooke voor lineair elastisch isotroop materiaal geldt:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & \frac{1}{E} & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

met  $E$  de elasticiteitsmodulus,  $\nu$  de dwarscontractiecoëfficiënt en  $G$  de glijdingsmodulus. De bovenstaande symmetrische matrix die het lineaire verband tussen de rekken en spanningen karakteriseert noemen we de complantiematrix of flexibiliteitsmatrix  $\underline{H}$ :

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

We schrijven het bovenstaande constitutieve verband volgens Hooke nu als

$$\underline{\varepsilon} = \underline{H} \underline{\sigma}$$

Als  $\nu \neq \frac{1}{2}$  dan is  $\underline{H}$  regulier en heeft dan een inverse die we de lokale stijfheidsmatrix  $\underline{D}$  noemen. Eenvoudig is uit  $\underline{D} = \underline{H}^{-1}$  af te leiden dat geldt:

$$\underline{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Met  $\underline{D}$  kunnen de spanningen in de rekken worden uitgedrukt volgens:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$$

### 2.2.3 De evenwichtsvergelijkingen

Uit het evenwicht van een infinitesimaal klein blokje materiaal in ieder punt van de constructie in de huidige configuratie kan eenvoudig worden afgeleid dat moet gelden:

$$\underline{\underline{\partial}}^T \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{q}} = 0 \quad \text{in } V$$

$$\text{met } \underline{\underline{\partial}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

en  $\underline{\underline{q}}$  de kolom met de krachten per volume-eenheid in de huidige toestand.

Omdat de vervormingen en de rotaties als star lichaam zeer klein verondersteld worden, mogen we  $\underline{\underline{\partial}}^T$  vervangen door  $\underline{\underline{\partial}}_0^T$  en kunnen we  $\underline{\underline{q}}$  ook betrekken op de referentietoestand. We mogen dan voor de formulering van het evenwicht schrijven:

$$\underline{\underline{\partial}}_0^T \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{q}} = 0 \quad \text{in } V_0$$

of uitgedrukt in het verplaatsingsveld:

$$\underline{\underline{\partial}}_0^T (\underline{\underline{D}} \underline{\underline{\partial}}_0 \hat{\underline{\underline{u}}}) + \underline{\underline{q}} = 0 \quad \text{in } V_0$$

Voor de eenduidige oplossing van dit stelsel tweede orde partiële differentiaalvergelijking en zijn ruimtelijke randvoorwaarden nodig.

In het algemeen hebben we een set zogenaamde kinematische randvoorwaarden en een set dynamische randvoorwaarden. Met kinematische randvoorwaarden bedoelen we dat op een randgedeelte  $\Gamma_u$  verplaatsingen zijn voorgeschreven en met dynamische randvoorwaarden bedoelen we dat op een randgedeelte  $\Gamma_\sigma$  de externe belasting is voorgeschreven.

We zoeken dus een oplossing voor  $\hat{\underline{\underline{u}}}\left(\begin{smallmatrix} x \\ z_0 \end{smallmatrix}\right)$  die overal in  $V_0$  aan het stelsel

differentiaalvergelijkingen en op de rand tevens aan de randvoorwaarden voldoet.

Dit is meestal zeer moeilijk tot onmogelijk als de constructie een onregelmatige vorm heeft.

Daarom zijn er benaderingsmethoden ontwikkeld en daar is de eindige elementenmethode er een van. Door, zoals we in het volgende hoofdstuk zullen zien, bepaalde veronderstellingen te doen over het verplaatsingsveld zijn we meestal in staat om overal in de constructie een goede

benadering voor het verplaatsingsveld en daaruit vervolgens via differentiatie een benadering voor het rekveld te vinden.

Toepassing van de wet van Hooke levert dan vervolgens weer een benadering voor het spanningsveld.

### 2.3 Samenvatting van de geometrisch en fysisch lineaire elasticiteitsleer in de continuümsmechanica

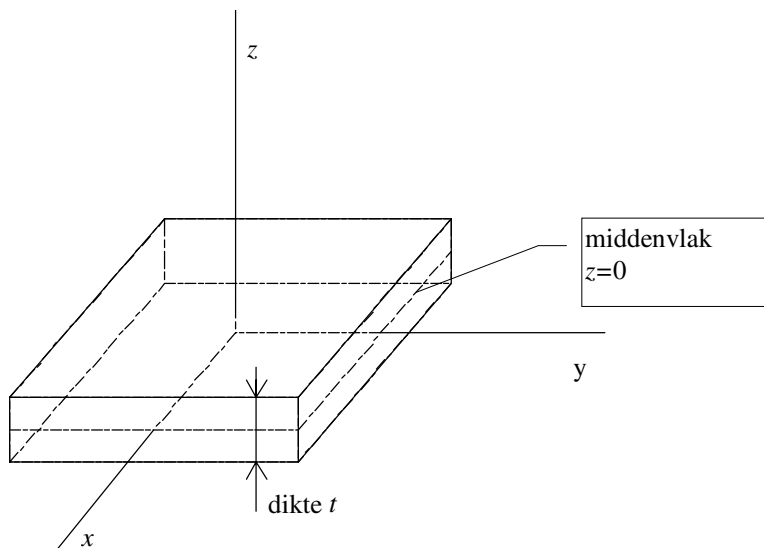
Veldgrootheden (met $x_{\sim 0} \in V_0$ )	Aantal	Vergelijkingen geldig voor alle $x_{\sim 0} \in V_0$	Aantal
$\hat{u} = \hat{u}(x_{\sim 0})$	3	Rek-verplaatsingsrelaties $\underline{\varepsilon} = \underline{\partial}_0 \hat{u}$	6
$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}(x_{\sim 0})$	6	Constitutieve vergelijkingen $\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$	6
$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(x_{\sim 0})$	6	Evenwichtsvergelijkingen $\underline{\partial}_0^T \underline{\sigma} + \underline{q} = 0$	3
Totaal	15	Totaal	15

Voor dit stelsel zoeken we een benaderingsoplossing met de e.e.m.

### 2.4 De toestandsbeschrijving van het 2-D vlakspanningscontinuüm

#### 2.4.1 Kinematica

Beschouw een willekeurig deelvolume van een vlakke constructie met constante dikte  $t$  in de ruimte met een orthonormaal Cartesisch assenstelsel  $\{x, y, z\}$ . Het middenvlak van de constructie ligt op  $z = 0$ . De constructie wordt belast door krachten in de  $x$ - en  $y$ -richting, gelijkmatig over de dikte verdeeld. Wat de verplaatsingen betreft wordt aangenomen dat elk recht lijntje loodrecht op het middenvlak (en dus evenwijdig aan de  $z$ -as) na vervorming recht en evenwijdig aan de  $z$ -as is gebleven. Dit betekent dat de verplaatsingen  $u$  en  $v$  (in  $x$ -en  $y$ -richting) geen functie zijn van  $z$  maar alleen afhankelijk zijn van  $x$  en  $y$ .



De verplaatsing  $w$  in de  $z$ - richting wordt verder niet in de beschouwing betrokken.  
De kolom met verplaatsingen is derhalve:

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

De kolom met relevante rekgrootheden is in dit geval

$$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]^T = \underline{\partial}_0 \hat{u}$$

met

$$\underline{\partial}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_0} \\ \frac{\partial}{\partial y_0} & \frac{\partial}{\partial x_0} \end{bmatrix}$$

## 2.4.2 Constitutieve vergelijkingen

De spanningsgrootheden  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{yz}$  en  $\tau_{zx}$  voor onder-en bovenzvlak  $\left(z = \pm \frac{t}{2}\right)$  zijn gelijk aan nul en aangenomen wordt dat dat ook het geval is tussen onder-en bovenzvlak  $\left(-\frac{t}{2} < z < \frac{t}{2}\right)$ .

Voor de spanningstoestand zijn alleen  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$  en  $\tau_{xy}$  relevant; aangenomen wordt dat deze spanningen constant zijn over de dikte van de plaat hetgeen impliceert dat ze alleen een functie zijn van  $x$  en  $y$ . De kolom met relevante spanningscomponenten  $\underline{\sigma}$  is in dit geval:

$$\underline{\sigma} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy}]^T$$

De wet van Hooke voor lineair elastisch isotroop materiaal geldt in dit geval weer:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{H} \underline{\sigma}$$

maar nu geldt:

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}$$

Inverteren van de compliantiematrix of flexibiliteitsmatrix  $\underline{H}$  levert als de lokale stijfheidsmatrix voor vlakspanning  $\underline{D}$ :

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

We schrijven het bovenstaande constitutieve verband volgens Hooke weer als

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$$

### 2.4.3 De evenwichtsvergelijkingen

Uit het evenwicht van een infinitesimaal klein blokje materiaal in een willekeurig punt van de constructie in de huidige configuratie kan weer eenvoudig worden afgeleid dat onder de voorwaarde van geometrische lineariteit moet gelden :

$$\underline{\partial}_0^T \underline{\sigma} + \underline{q} = 0 \quad \text{in } V_0$$

met  $\underline{q}$  de kolom met de belasting per volume-eenheid  $\begin{bmatrix} q_x & q_y \end{bmatrix}^T$ .

### 2.5 Samenvatting van de geometrisch en fysisch lineaire elasticiteitsleer bij 2-D vlakspanning

Veldgrootheden (met $\underline{x} \in V_0$ )	Aantal	Vergelijkingen geldig voor alle $\underline{x} \in V_0$	Aantal
$\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{u}}(\underline{x})$	2	Rek-verplaatsingsrelaties $\underline{\varepsilon} = \underline{\partial}_0 \underline{\hat{u}}$	3
$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}(\underline{x})$	3	Constitutieve vergelijkingen $\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$	3
$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{x})$	3	Evenwichtsvergelijkingen $\underline{\partial}_0^T \underline{\sigma} + \underline{q} = 0$	2
Totaal	8	Totaal	8

Voor dit stelsel zoeken we een benaderingsoplossing met de e.e.m.



# Hoofdstuk 3

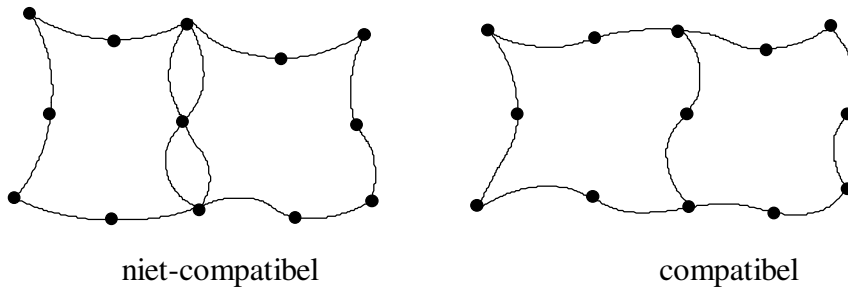
## De eindige elementen discretisering

### 3.1 Benaderingsfuncties voor het verplaatsingsveld

Met de eindige elementenmethode wordt een benadering gezocht voor de oplossing van de differentiaalvergelijkingen die het mechanische (of eventueel anderssoortige) probleem beschrijven. Een van de maatregelen die we hiertoe nemen is het voorschrijven van de aard van de benaderingsfuncties voor de verplaatsingen. We delen hiertoe de constructie op een groot aantal deelvolumes, elementen genaamd. Bij toepassing van de 3-D theorie zijn dat volume-elementen en bij toepassing van de vlakspanningstheorie zijn dat vlakke elementen met een bepaalde dikte. Zo heeft iedere bijzondere theorie bijbehorende elementen. De randen van de volume-elementen zijn in het algemeen (gekromde) randvlakken (faces) die elkaar snijden volgens randkrommen in de ruimte (edges). Verder liggen er zogenaamde knooppunten op of binnen de rand van het element. Ze liggen meestal, maar niet noodzakelijk, op de randkrommen, en daarbij meestal op de hoekpunten, dat zijn de snijpunten van de randkrommen. Binnen alle elementen wordt een verplaatsingsveld aangenomen uitgedrukt in de coördinaten en een aantal parameters. Als we die parameters op de een of andere manier kunnen berekenen dan is het benaderde verplaatsingsveld bekend. Uit het benaderde verplaatsingsveld kunnen dan vervolgens de benaderde rekken en spanningen worden bepaald. Over het volume van de constructie wordt een zogenaamd netwerk van element gelegd. We noemen dit dan een "mesh". De generatie van zo'n mesh gebeurt meestal automatisch met een programma dat we een meshgenerator noemen. Zo'n meshgenerator is weer een onderdeel van een zogenaamde preprocessor die meestal samen gaat met een postprocessor waarmee de resultaten van de eindige elementen methode berekeningen grafisch worden gerepresenteerd.

### 3.2 De problematiek van aansluiting of compatibiliteit

Bij het toepassen van de elementenmethode wordt dat in de onvervormde toestand van een element, de vorm vastgelegd met de specificatie van de coördinaten van de knooppunten, die al dan niet op de elementranden liggen. Als de knooppuntsverplaatsingen gegeven zijn, zal ook de vorm van zo'n element in de vervormde toestand bekend zijn. De elementformulering dient zodanig te zijn dat, zowel in onvervormde als in vervormde toestand, aangrenzende elementen precies tegen elkaar passen zonder dat spleten tussen de elementen voorkomen en zonder dat overlapping optreedt: de elementen dienen "compatibel" te zijn. Door de knooppunten op een gemeenschappelijke zijde te laten samenvallen is in ieder geval de continuïteit van de verplaatsingen in die knooppunten gewaarborgd (zie onderstaande figuur). Voor de continuïteit tussen de knooppunten in, dienen extra voorzieningen getroffen te worden. Voor de eenvoud wordt een en ander toegelicht aan 2-D elementen. Extrapolatie naar 3-D elementen kan men zich dan verder eenvoudig voorstellen.



Ten behoeve van de compatibiliteit zal in ieder geval geëist moeten worden dat de vorm van een elementrand (in onvervormde of vervormde toestand) volledig wordt bepaald door de (oorspronkelijke of huidige) coördinaten van de knooppunten op die elementrand. De correcte aansluiting van elementen onderling stelt een aantal eisen aan de bij de elementformulering behorende geometriebeschrijving. Met een aantal andere eisen dient echter eveneens rekening gehouden te worden. Wanneer de knooppuntsverplaatsingen een verplaatsing als star lichaam representeren, dient het verplaatsingsveld zodanig te zijn dat het gehele element als star lichaam verplaatst en dat derhalve de bijbehorende rekken gelijk zijn aan nul. Tevens dient het verplaatsingsveld de mogelijkheid te bieden dat homogene rekvelen (constante rekken) optreden opdat voor een bepaalde constructie bij elementverfijning convergentie naar de exacte oplossing optreedt. Tenslotte is het gewenst dat de stijfheid van een element onafhankelijk is van de stand t.o.v. het coördinatensysteem. De keuze van de geometriebeschrijving is beperkt doordat bij voorkeur aan een aantal voorwaarden voldaan moet zijn om een fysisch reële oplossing te krijgen.

Samengevat:

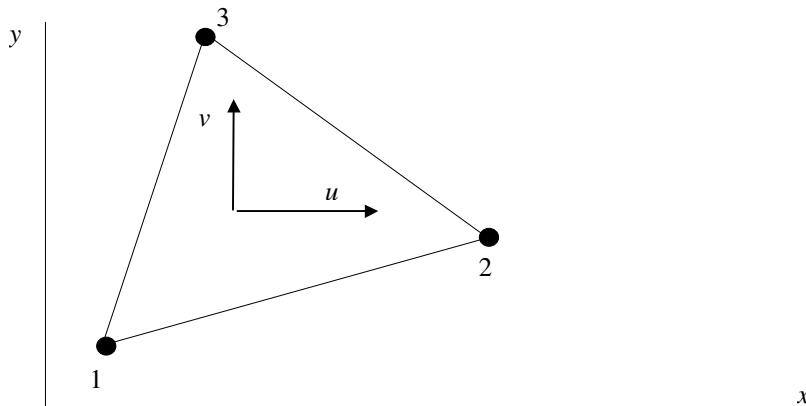
- 1. Compatibiliteit. De aansluiting van de elementen moet gegarandeerd zijn.
- 2. Ieder element moet een beweging als star lichaam kunnen representeren.
- 3. Binnen ieder element moet een constant rekveld gerepresenteerd kunnen worden.
- 4. De stijfheid moet ongevoelig zijn voor de ruimtelijke oriëntatie.

Het is soms zeer moeilijk, zo niet onmogelijk, om aan al deze eisen te voldoen. Onder bepaalde condities is dat overigens ook niet geheel noodzakelijk om tot zinvolle resultaten te komen.

Het is bijvoorbeeld best mogelijk dat meshverfijning met incompatibele elementen convergentie naar de exacte oplossing oplevert.

### 3.3 Een vlak driehoekig element als eenvoudig voorbeeld

We nemen als voorbeeld het volgende 3-knoops driehoekig element.



We maken vanwege de geometrische lineariteit geen onderscheid tussen kolommen met verplaatsingen  $\hat{u}(x_0, y_0)$  en  $\hat{u}(x, y)$  en gebruiken in het vervolg  $\hat{u}(x, y)$  of  $\hat{u}(\underline{x})$

We veronderstellen dat de verplaatsingen  $u(\underline{x})$  en  $v(\underline{x})$  lineaire functies van  $x$  en  $y$  zijn.

We kunnen dan schrijven:

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = \underline{M} \underline{c}$$

waarbij de van  $x$  en  $y$  afhankelijke matrix  $\underline{M}$  is gedefinieerd met:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix}$$

en de kolom  $\underline{c}$  met coëfficiënten

$$\underline{c} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5 \quad c_6]^T$$

Er zijn 6 vrijheidsgraden, de verplaatsingen van de knooppunten in  $x$ -en  $y$ -richting, en ook 6 coëfficiënten. Het ligt dus voor de hand dat we gaan proberen de coëfficiënten uit te drukken in de vrijheidsgraden van het element. De consistentie-eis stelt dat de kolom met

knooppuntvrijheidsgraden:  $\underline{u} = [u^1 \quad v^1 \quad u^2 \quad v^2 \quad u^3 \quad v^3]^T$  als volgt kan worden uitgedrukt in de kolom met coëfficiënten  $\underline{c}$ :

$$\begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \\ u^2 \\ v^2 \\ u^3 \\ v^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x^1 & 0 & y^1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^1 & 0 & y^1 \\ 1 & 0 & x^2 & 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^2 & 0 & y^2 \\ 1 & 0 & x^3 & 0 & y^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^3 & 0 & y^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix}$$

en met de definitie van de reguliere 6\*6 matrix  $\underline{G}$  volgens:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x^1 & 0 & y^1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^1 & 0 & y^1 \\ 1 & 0 & x^2 & 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^2 & 0 & y^2 \\ 1 & 0 & x^3 & 0 & y^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^3 & 0 & y^3 \end{bmatrix} \text{ (reguliere 6*6 matrix)}$$

schrijven we de consistentie als:

$$\underline{\tilde{u}} = \underline{G} \underline{\tilde{c}}$$

en daaruit volgt:

$$\underline{\tilde{c}} = \underline{G}^{-1} \underline{\tilde{u}}$$

Hiermede schrijven we voor de kolom met verplaatsingen voor een willekeurig punt van het element:

$$\underline{\hat{u}} = \underline{M} \underline{G}^{-1} \underline{\tilde{u}}$$

We definiëren een matrix met zogenaamde interpolatiefuncties  $\underline{N}$  gedefinieerd als:

$$\underline{N} = \underline{M} \underline{G}^{-1}$$

waarmee we de kolom met verplaatsingen voor een willekeurig punt van het element schrijven als:

$$\underline{\hat{u}} = \underline{N} \underline{u}$$

In verband met de grote hoeveelheid rekenwerk laten we de berekening van  $\underline{G}^{-1}$  achterwege en vermelden we slechts dat  $\underline{N}$  de volgende vorm heeft:

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N^1 & 0 & N^2 & 0 & N^3 & 0 \\ 0 & N^1 & 0 & N^2 & 0 & N^3 \end{bmatrix}$$

Bij ieder knooppunt  $i$  hoort een interpolatiefunctie  $N^i$ , lineair in  $x$  en  $y$ . Uiteraard moet gelden:

$$N^i(\underline{x}^j) = \delta_{ij} \quad \text{met} \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{als} \quad i \neq j \quad \text{en} \quad \delta_{ij} = 1 \quad \text{als} \quad i = j$$

We zullen nu controleren of het aldus benaderde verplaatsingsveld voldoet aan de vier eisen die we aan benaderingsvelden hebben gesteld.

- Omdat de verplaatsingen langs de rand van een element (tussen twee knooppunten) lineair verlopen zullen twee aangrenzende punten die op twee, in onbelaste toestand aangrenzende, elementranden liggen, allebei dezelfde verplaatsing ondergaan en na vervorming nog steeds aan elkaar grenzen. Ook zullen de randen na vervorming recht blijven. De formulering leidt dus tot een compatibel verplaatsingsveld.
- Als alle knooppunten dezelfde verplaatsing hebben dan hebben ook alle randen dezelfde verplaatsing en dan hebben dus ook alle interne punten dezelfde verplaatsing. De beweging als star lichaam wordt dus goed beschreven. Bij een starre rotatie hoort een lineair verplaatsingsveld in  $x$  en  $y$ . Dus als de

knooppunten om een bepaald punt in de ruimte roteren dan roteren de punten binnen het element om hetzelfde punt.

- Omdat rekken binnen het element altijd constant zijn is aan de eis dat een constante rek moet kunnen worden gerepresenteerd automatisch voldaan.
- Langs ieder willekeurig lijntje verloopt de verplaatsing lineair en is de rek constant, onafhankelijk van de oriëntatie van het element.

Dit element voldoet dus aan alle eisen.

Bij een constructie met een sterk heterogeen rekveld blijken in de praktijk echter nogal veel elementen nodig te zijn om zo'n veld goed te beschrijven. We kunnen de rekken eenvoudig bepalen:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\partial}} \underline{\underline{\hat{u}}} = \underline{\underline{\partial N}} \underline{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N^2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N^3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N^2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N^3}{\partial y} \\ \frac{\partial N^1}{\partial y} & \frac{\partial N^1}{\partial x} & \frac{\partial N^2}{\partial y} & \frac{\partial N^2}{\partial x} & \frac{\partial N^3}{\partial y} & \frac{\partial N^3}{\partial x} \end{bmatrix} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{u}}$$

Hierin is de matrix  $\underline{\underline{B}}$  gedefinieerd als:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N^2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N^3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N^2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N^3}{\partial y} \\ \frac{\partial N^1}{\partial y} & \frac{\partial N^1}{\partial x} & \frac{\partial N^2}{\partial y} & \frac{\partial N^2}{\partial x} & \frac{\partial N^3}{\partial y} & \frac{\partial N^3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Zonder uitvoering van al het het bijbehorende rekenwerk vermelden we dat bij dit element geldt:

$$\underline{\underline{B}} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

met het oppervlak  $A$  van de driehoek:

$$A = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

De nummering 1,2,3 moet tegen de klok in zijn opdat  $A$  positief is.

We merken op dat  $\underline{\underline{B}}$  hier (bij uitzondering) constant is en dus de kolom met rekken ook. De per element constante kolom met spanningen vinden we eenvoudig uit

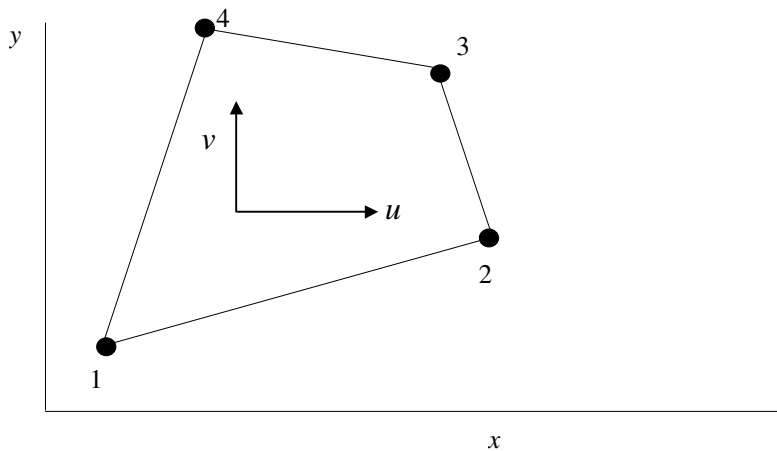
$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{u}}$$

We merken op dat in het algemeen de constante rekken en de constante spanningen per element verschillend zijn en dus discontinu zijn over de elementgrenzen.

Bij de grafische weergave van de resultaten door een postprocessor worden de rekken en spanningen vaak “glad” gestreken. Dit kan in gebieden met sterke gradiënten een vertekend beeld geven. Als die gebieden interessant zijn moet in dat geval met een fijnere mesh in die gebieden gerekend worden.

### 3.4 Een incompatibel vlak element met 4 knooppunten

We beschouwen nu een vlak vierknoops element met rechte randen en proberen vervolgens via dezelfde strategie als bij het driehoekige element een matrix  $\underline{N}$  met interpolatiefuncties te vinden zodanig dat aan de geformuleerde eisen is voldaan.



We gaan daarom uit van:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underline{M} \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{bmatrix}$$

Ook nu geldt weer een consistentierelatie:

$$\underline{c} = \underline{G}^{-1} \underline{u} \quad \text{met} \quad \underline{u} = [u^1 \quad v^1 \quad u^2 \quad v^2 \quad u^3 \quad v^3 \quad u^4 \quad v^4]^T$$

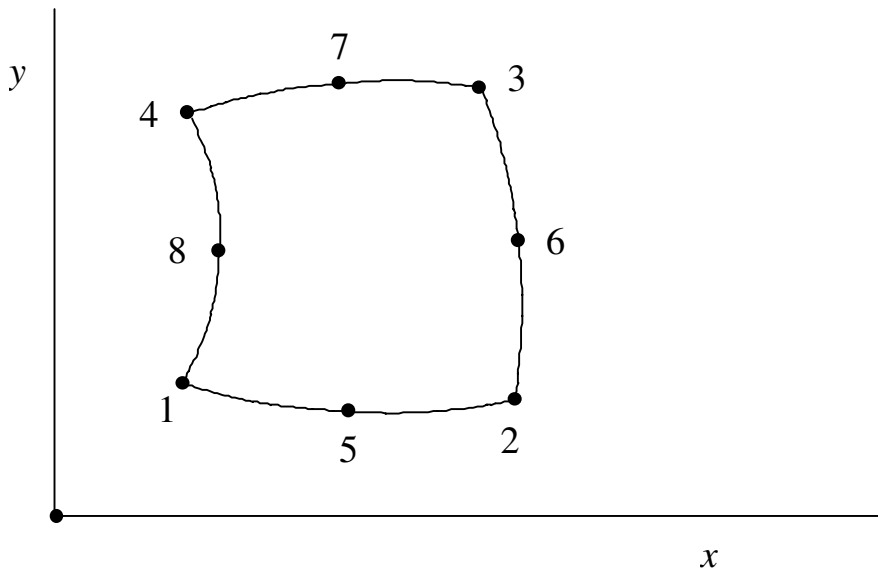
Er ontstaat nu echter een probleem met de compatibiliteit.

Neem een coördinaat  $s$  langs een elementrand. De coördinaten  $x$  en  $y$  zijn langs zo'n rand lineair in  $s$ . De verplaatsingen  $u$  en  $v$  zijn bilineair in de coördinaten  $x$  en  $y$  en dus langs zo'n rand kwadratisch in  $s$ . De randen blijven dus niet recht. De verplaatsingen op zo'n rand zijn

dan afhankelijk van verplaatsingen van knooppunten die niet op die rand liggen. Aangrenzende rechte randen zijn dus in het algemeen na deformatie niet meer recht en niet aansluitend. De gevolgde methode werkt in dit geval niet en we moeten dus een andere weg bewandelen. We zullen zogenaamde isoparametrische elementen invoeren. De werkwijze wordt aan de hand van een 8-knoops element toegelicht.

### 3.5 Een vlak vierhoekig 8-knoops isoparametrisch element met kromme randen

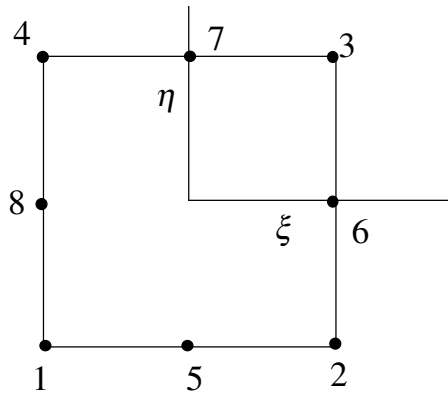
De problemen die zich voordoen bij vierhoekige elementen met vier knooppunten komen volledig terug bij elementen met acht knooppunten op de rand. Was echter de vorm van de elementzijden bij vierknoops elementen bekend (rechte zijden), bij achtknoops elementen treedt een complicatie op. Het element heeft in het algemeen kromme randen met een te specificeren verloop in  $x$  en  $y$ . Het zal duidelijk zijn dat de aansluiting tussen aangrenzende elementen daardoor in principe extra gecompliceerd wordt. De knooppunten zijn genummerd zoals in onderstaande figuur weergegeven. De tussenknooppunten liggen ongeveer halverwege de hoekknooppunten.



De vorm van een elementzijde moet, zowel in onvervormde als in vervormde toestand, vastliggen met de coördinaten van de knooppunten op die zijde. Voor de oplossing van de problemen wordt een basiselement geïntroduceerd. Zowel in onvervormde als in vervormde toestand wordt een willekeurig element opgevat als een getransformeerde vorm van dat basiselement, waarbij voor onvervormde en vervormde geometrie, gelijksoortige transformaties worden gehanteerd. In de volgende paragraaf wordt een uitwerking gepresenteerd voor een 2-D vierhoekig achtknoops element.

#### 3.5.1 Geometrie basiselement

Voor 2-D vierhoekige elementen met acht knooppunten hanteren we als grondvorm een basiselement zoals dat in onderstaande figuur is getekend.



$\xi$  en  $\eta$  zijn plaatsbepalende parameters met  $-1 \leq \xi \leq 1$  en  $-1 \leq \eta \leq 1$

Er is een stelsel lokale plaatsbepalende parameters  $\xi, \eta$  geïntroduceerd die in het vervolg een rol zullen spelen. Bij een knooppunt  $i$  behoren de waarden  $\xi^i$  en  $\eta^i$ :

$$\begin{aligned} \xi^1 &= -1, & \xi^2 &= 1, & \xi^3 &= 1, & \xi^4 &= -1, & \xi^5 &= 0, & \xi^6 &= 1, & \xi^7 &= 0, & \xi^8 &= -1 \\ \eta^1 &= -1, & \eta^2 &= -1, & \eta^3 &= 1, & \eta^4 &= 1, & \eta^5 &= -1, & \eta^6 &= 0, & \eta^7 &= 1, & \eta^8 &= 0 \end{aligned}$$

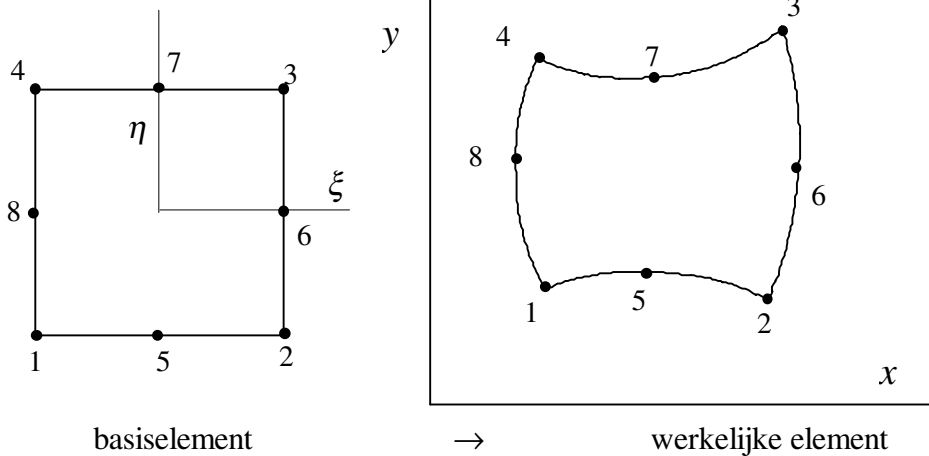
Elementzijden worden geïdentificeerd met:  $-1 \leq \xi \leq 1, \eta = \pm 1$  of met  $-1 \leq \eta \leq 1, \xi = \pm 1$

### 3.5.2 Transformatie van het coördinatensysteem

Een willekeurig vierhoekig element met acht knooppunten wordt opgevat als een transformatie van het basiselement via de volgende overgangsrelaties:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^8 \varphi^i(\xi, \eta) x^i \\ y &= \sum_{i=1}^8 \varphi^i(\xi, \eta) y^i \end{aligned}$$

waarbij met  $x^i$  en  $y^i$  de coördinaten van de knooppunten van het werkelijke element in het  $x, y$ -assenstelsel zijn aangegeven, en met  $\varphi^i(\xi, \eta)$  nader te definiëren vormfuncties.





Kort geschreven:

$$\underline{x} = \underline{N}(\xi, \eta) \underline{e}_x$$

met de kolom met knooppuntscoördinaten

$$\underline{e}_x = [x^1 \quad y^1 \quad x^2 \quad y^2 \quad \dots \quad x^8 \quad y^8]^T$$

en de matrix met vormfuncties of interpolatiefuncties

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} \varphi^1(\xi, \eta) & 0 & \varphi^2(\xi, \eta) & 0 & \dots & \varphi^8(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & \varphi^1(\xi, \eta) & 0 & \varphi^2(\xi, \eta) & \dots & 0 & \varphi^8(\xi, \eta) \end{bmatrix}$$

De functies  $\varphi^i(\xi, \eta)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ , moeten nog nader gespecificeerd worden. Een willekeurig punt van het basiselement wordt geïdentificeerd met  $\xi$  en  $\eta$ . En via  $\underline{x} = \underline{N}(\xi, \eta) \underline{e}_x$  kunnen de  $x, y$  coördinaten van het overeenkomstige punt in het werkelijke element worden gevonden. Met de keuze van  $\varphi^i(\xi, \eta)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ , ligt de transformatie vast. Bij gegeven knooppuntscoördinaten  $\underline{e}_x$  is dan de vorm van het werkelijke element geheel bepaald.

Ten behoeve van de consistentie van deze relaties dient voldaan te zijn aan

$$\varphi^i(\xi^j, \eta^j) = \delta_{ij} ; i, j = 1, 2, \dots, 8.$$

Voor de compatibiliteit langs bijvoorbeeld de elementzijde met knooppunten 2-6-3, geïdentificeerd met  $\xi = 1$ ,  $-1 \leq \eta \leq 1$  is noodzakelijk dat voor alle toegelaten waarden van  $\eta$  en voor  $\xi = 1$  geldt:

$$\varphi^1(1, \eta) = \varphi^4(1, \eta) = \varphi^5(1, \eta) = \varphi^7(1, \eta) = \varphi^8(1, \eta) = 0$$

De compatibiliteit langs die zijde is verzekerd als daarnaast geldt dat  $\varphi^2(1, \eta)$ ,  $\varphi^3(1, \eta)$  en  $\varphi^6(1, \eta)$  kwadratisch zijn in de coördinaat  $\eta$ . Langs de andere zijden dienen uiteraard overeenkomstige eisen gesteld te worden.

De knooppuntscoördinaten kunnen zowel betrekking hebben op de onvervormde als op de vervormde configuratie van het werkelijke element. Voor beide configuraties wordt hetzelfde basiselement met dezelfde vormfuncties genomen. Vandaar het woord isoparametrisch. De compatibiliteit is dan voor zowel de onvervormde als voor de vervormde toestand verzekerd. Voor de coördinaten in de vervormde toestand wordt genoteerd:

$$x + u = \sum_{i=1}^8 \varphi^i(\xi, \eta)(x^i + u^i) = x + \sum_{i=1}^8 \varphi^i(\xi, \eta)u^i$$

$$y + v = \sum_{i=1}^8 \varphi^{(i)}(\xi, \eta)(y^i + v^i) = y + \sum_{i=1}^8 \varphi^i(\xi, \eta)v^i$$

Voor de verplaatsingen geldt dus:

$$u = \sum_{i=1}^8 \varphi^i(\xi, \eta) u^i$$

$$v = \sum_{i=1}^8 \varphi^i(\xi, \eta) v^i$$

Kort geformuleerd:

$$\hat{u} = \underline{N} u$$

Daarmee is een formulering van dezelfde vorm als in 3.1 verkregen, echter als onafhankelijke variabelen fungeren nu de parameters  $\xi$  en  $\eta$  en niet de coördinaten  $x$  en  $y$  ter identificatie van de plaats.

### 3.5.3 Verplaatsing als star lichaam en homogene deformatie

Behalve dat de vormfuncties  $\varphi^i(\xi, \eta)$  moeten voldoen aan voorwaarden die voortvloeien uit compatibiliteitseisen, moet het verplaatsingsveld zodanig zijn dat verplaatsing van het werkelijke element als star lichaam en homogene deformatie (constante rekken) mogelijk zijn. Het is eenvoudig in te zien dat dit mathematisch als volgt geformuleerd kan worden. Voor elke combinatie van numerieke waarden voor  $p_1, p_2, p_3$  en  $q_1, q_2, q_3$ , geldt dat substitutie van:

$$u^i = p_1 + p_2 x^i + p_3 y^i \quad \text{in het verplaatsingsveld} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \sum_{i=1}^8 \varphi^i(\xi, \eta) u^i \\ v = \sum_{i=1}^8 \varphi^i(\xi, \eta) v^i \end{array} \right.$$

leidt tot:

$$u = \sum_{i=1}^8 \left[ \varphi^i(\xi, \eta) (p_1 + p_2 x^i + p_3 y^i) \right] = p_1 \sum_{i=1}^8 \varphi^i(\xi, \eta) + p_2 x + p_3 y$$

$$v = \sum_{i=1}^8 \left[ \varphi^i(\xi, \eta) (q_1 + q_2 x^i + q_3 y^i) \right] = q_1 \sum_{i=1}^8 \varphi^i(\xi, \eta) + q_2 x + q_3 y$$

Indien nu voor iedere  $\xi$  en iedere  $\eta$  voldaan is aan :

$$\sum_{i=1}^8 \varphi^i(\xi, \eta) = 1$$

dan geldt overal binnen het element:

$$\hat{u} = p_1 + p_2 x + p_3 y$$

$$\hat{v} = q_1 + q_2 x + q_3 y$$

en dan is voldaan aan de eisen dat een beweging als star lichaam en representatie van homogene deformatie mogelijk is. De eis die we in verband hiermee aan de vormfuncties moeten stellen is dus:

$$\sum_1^8 \varphi^i(\xi, \eta) = 1$$

Opgemerkt wordt dat dit in de knooppunten was geëist d.m.v.

$$\varphi^i(\xi^j, \eta^j) = \delta_{ij} ; i, j = 1, 2, \dots, 8.$$

### 3.5.4 Vormfuncties voor het vierhoekige achtknoops element

Het vinden van vormfuncties die aan de gestelde eisen voldoen, is een eenvoudig probleem. We volstaan met de presentatie van een set vormfuncties voor het vierhoekige element met acht knopen uit bovenstaande figuur. Eenvoudig kan worden geverifieerd dat aan alle voorwaarden is voldaan met:

$$\begin{aligned} \varphi^1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta - 1)(-\xi - \eta - 1) & \varphi^2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta - 1)(-\xi + \eta + 1) \\ \varphi^3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta + 1)(\xi + \eta - 1) & \varphi^4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta + 1)(\xi - \eta + 1) \\ \varphi^5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta - 1) & \varphi^6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(-\xi - 1)(\eta^2 - 1) \\ \varphi^7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(-\eta - 1) & \varphi^8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(\xi - 1)(\eta^2 - 1) \end{aligned}$$

### 3.5.5 De uitdrukkingen voor de kolom met rekken

Voor de kolom met rekken geldt bij geometrische lineariteit

$$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]^T = \underline{\partial} \hat{u} = \underline{\partial N} u = \underline{B} u$$

met

$$\underline{\partial} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Voor de matrix  $\underline{B}$  vinden we nu dus:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi^8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \varphi^2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi^8}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi^2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \varphi^8}{\partial y} & \frac{\partial \varphi^8}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Om  $\underline{B}$  te berekenen hebben we van de vormfuncties  $\varphi^i = (i = 1, 2, \dots, 8)$ , die bekend zijn als functie van de parameters  $\xi$  en  $\eta$ , de partiële afgeleiden naar  $x$  en  $y$  nodig. We berekenen die grootheden op de volgende manier. Er geldt volgens de kettingregel bij differentiëren:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

De matrix  $\underline{J}$ :

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

wordt de matrix van Jacobi genoemd, behorend bij de overgang van de coördinaten  $x, y$  naar de parameters  $\xi, \eta$ . De matrix  $\underline{J}$  kan eenvoudig worden bepaald als functie van de parameters  $\xi$  en  $\eta$ :

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi} x^i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi} y^i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \varphi^i}{\partial \eta} x^i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \varphi^i}{\partial \eta} y^i \end{bmatrix}$$

We realiseren ons hierbij dat de matrix van Jacobi in een punt van een element geheel bepaald wordt door de isoparametrische coördinaten in dat punt  $(\xi, \eta)$  en de coördinaten van de

knooppunten van het beschouwde element  ${}^e \underline{x}$ .

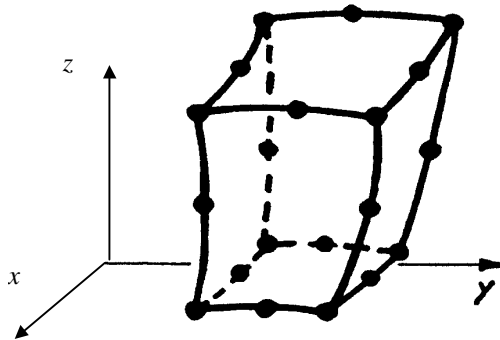
De componenten van de matrix  $\underline{B}$  kunnen nu worden uitgedrukt in de parameters  $(\xi, \eta)$  en  ${}^e \underline{x}$  met behulp van de volgende relatie:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

De matrix  $\underline{J}$  dient ten behoeve van het bovenstaande regulier te zijn. Dit is steeds het geval als bij de knooppuntscoördinaten  $x^i, y^i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) een redelijke elementvorm behoort. Hiermee is de  $\underline{B}$  matrix in ieder punt van elk element uit te drukken in de coördinaten van de knooppunten  $x^k$  van het beschouwde element, de isoparametrische coördinaten van het beschouwde punt.

### 3.6 Isoparametrische 3-D ruimtelijke elementen met kromme randen

Er zijn meerdere soorten isoparametrische ruimtelijke elementen afgeleid. Hieronder is er een getekend. De werkwijze voor de afleiding van de  $\underline{B}$  matrix, die nodig is om de rekken en de spanningen in de knooppuntsverplaatsingen van dit element uit te drukken is vrijwel hetzelfde als bij het vlakke element in de vorige paragraaf.

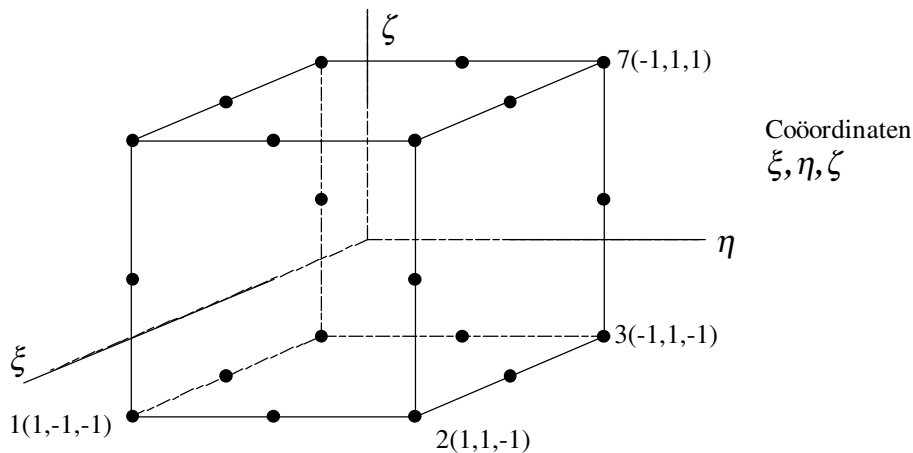


Als voorbeeld wordt het 20-knoops 3-D element uit bovenstaande figuur behandeld. We definiëren hiervoor een kubisch 20-knoops basiselement in een rechtsdraaiend orthonormaal  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  assenstelsel met de ribben evenwijdig aan de coördinaatassen.

De knooppunten  $i = 1, 2, \dots, 20$  hebben de volgende isoparametrische coördinaten:

$$\xi = -1, 0 \text{ of } 1; \eta = -1, 0 \text{ of } 1, \zeta = -1, 0 \text{ of } 1$$

De 6 zijvlakken liggen op  $\xi = -1, \xi = 1, \eta = -1, \eta = 1, \zeta = -1$  en  $\zeta = 1$



Bij ieder knooppunt hoort een vormfunctie  $\varphi^i(\xi, \eta, \zeta)$  zodanig dat geldt:

$$\hat{u}(\underline{x}) = [u \quad v \quad w]^T = \underline{N}(\xi, \eta, \zeta) \underline{u}$$

Hierin is de matrix met vormfuncties  $\underline{N}$  gedefinieerd als:

$$\underline{N}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \varphi^1 & 0 & 0 & \varphi^2 & 0 & 0 & \dots & \varphi^{20} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi^1 & 0 & 0 & \varphi^2 & 0 & \dots & 0 & \varphi^{20} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^1 & 0 & 0 & \varphi^2 & \dots & 0 & 0 & \varphi^{20} \end{bmatrix}$$

en de kolom met element-knooppuntsverplaatsingen  $\underline{u}$  als:

$$\underline{u} = [u^1 \quad v^1 \quad w^1 \quad u^2 \quad v^2 \quad w^2 \quad \dots \quad u^{20} \quad v^{20} \quad w^{20}]^T$$

In verband met de consistentie moet gelden:

$$\varphi^i(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 20)$$

en in verband met de representatie van de beweging als star lichaam en constante rek moet gelden:

$$\sum_1^{20} \varphi^i(\xi, \eta, \zeta) = 1 \quad \text{voor alle } (\xi, \eta, \zeta)$$

Er zijn eenvoudig 20 vormfuncties af te leiden die aan deze voorwaarden voldoen.

Zo geldt voor knooppunt 1 met  $(\xi, \eta, \zeta) = (1, -1, -1)$  de vormfunctie

$$\varphi^1 = \frac{1}{8}(-2 + \xi - \eta - \zeta)(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)$$

Er geldt nu:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi^{20}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial \varphi^2}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi^{20}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi^1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial \varphi^{20}}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi^2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi^{20}}{\partial y} & \frac{\partial \varphi^{20}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi^1}{\partial z} & \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} & \frac{\partial \varphi^2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi^{20}}{\partial z} & \frac{\partial \varphi^{20}}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi^1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \varphi^{20}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \varphi^{20}}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Hierbij geldt weer

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial z} \end{bmatrix}$$

met de matrix van Jacobi gedefinieerd als:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

De matrix  $\underline{J}$  kan eenvoudig worden bepaald als functie van de parameters  $\xi$  en  $\eta$ :

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi} x^i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi} y^i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi} z^i \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \eta} x^i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \eta} y^i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \eta} z^i \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \zeta} x^i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \zeta} y^i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \zeta} z^i \end{bmatrix}$$

De componenten van de matrix  $\underline{B}$  kunnen nu worden uitgedrukt in de isoparametrische coördinaten  $(\xi, \eta, \zeta)$  en de knooppuntscoördinaten  ${}^e x$  met behulp van de relatie:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

# Hoofdstuk 4

## Berekening van de knooppuntsverplaatsingen uit de evenwichtsvergelijkingen

### 4.1 De evenwichtsvergelijkingen

In hoofdstuk 2 zijn de volgende 3 evenwichtsvergelijkingen voor een geometrisch lineair vervormend 3-D continuüm geformuleerd:

$$\underline{\underline{\partial}}_0^T \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}} \quad \text{in } V_0 \quad (\text{geldig in ieder punt v/d constructie})$$

Op basis van deze vergelijkingen en de discretisering met 3-D elementen volgens hoofdstuk 3 zullen we voor een 3-D continuüm de kolom met knooppuntsverplaatsingen van de constructie  $\underline{\underline{u}}$  bepalen. We zullen i.v.m. de beperking van de hoeveelheid schrijfwerk in het vervolg index 0 bij  $\underline{\underline{\partial}}_0$  weglaten.

### 4.2 De gewogen afwijkingen formulering van het evenwicht

We denken de constructie in elementen opgedeeld en beschouwen eerst een willekeurig element. De evenwichtvergelijkingen die binnen elk element gelden worden in de zogenaamde “gewogen afwijkingen formulering” geschreven volgens:

$$\int_{V_e} \underline{\underline{\hat{w}}}^T(\underline{\underline{x}}) \left( \underline{\underline{\partial}}^T \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{q}} \right) dV = 0 \quad \forall \underline{\underline{\hat{w}}}$$

Hierin is  $V_e$  het elementvolume in de onvervormde toestand van het element en  $\underline{\underline{\hat{w}}}(\underline{\underline{x}})$  een kolom met willekeurige continue weegfuncties.

$$\underline{\underline{\hat{w}}}(\underline{\underline{x}}) = \begin{bmatrix} w_x(\underline{\underline{x}}) & w_y(\underline{\underline{x}}) & w_z(\underline{\underline{x}}) \end{bmatrix}^T$$

Volgens de stelling van Gauss (partiële integratie in meer dimensies, zie bijlage A) geldt:

$$\int_{V_e} \left( \underline{\underline{\hat{w}}}^T \left( \underline{\underline{\partial}}^T \underline{\underline{\sigma}} \right) + \left( \underline{\underline{\partial}} \underline{\underline{\hat{w}}} \right)^T \underline{\underline{\sigma}} \right) dV = \int_{A_e} \underline{\underline{\hat{w}}}^T \left( \underline{\underline{n}} \underline{\underline{\sigma}} \right) dA$$

Nu is  $A_e$  het buitenoppervlak van het element en is matrix  $\underline{\underline{n}}$  gedefinieerd met behulp van de componenten van de buitennormaal  $\underline{\underline{n}} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}^T$  op het element-oppervlak in de  $x, y$  en  $z$ -richting volgens:



$$\underline{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}$$

Toepassing hiervan levert dan de zogenaamde zwakke formulering van het evenwicht:

$$\int_{V_e} (\underline{\partial} \hat{w})^T \underline{\sigma} dV = \int_{V_e} \hat{w}^T q dV + \int_{A_e} \hat{w}^T \underline{n} \underline{\sigma} dA \quad \forall \hat{w}$$

We definiëren nu een kolom met krachten per oppervlakte-eenheid  $\underline{t}$  in de drie richtingen:

$$\underline{t} = \underline{n} \underline{\sigma}$$

Substitutie hiervan in de zwakke formulering van het evenwicht levert:

$$\int_{V_e} (\underline{\partial} \hat{w})^T \underline{\sigma} dV = \int_{V_e} \hat{w}^T q dV + \int_{A_e} \hat{w}^T \underline{t} dA \quad \forall \hat{w}$$

### 4.3 De balans van interne en externe krachten op een element

We definiëren overeenkomstig de kolom met knooppuntsverplaatsingen een kolom met met waarden voor de weegfuncties in de element-knooppunten. Bij een 3-D element met  $nk$  knooppunten luidt deze kolom dan:

$$\underline{w} = \left[ w_x^1 \quad w_y^1 \quad w_z^1 \quad w_x^2 \quad w_y^2 \quad w_z^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad w_x^{nk} \quad w_y^{nk} \quad w_z^{nk} \right]^T$$

Volgens de methode van Galerkin discretiseren we het element-weegfunctieveld  $\hat{w}(\underline{x})$  op precies dezelfde manier als het verplaatsingsveld. We kunnen dan dus ook schrijven:

$$\hat{w} = \underline{N}(\underline{x}) \underline{w}$$

Voor het rekveld binnen het element geldt:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\partial} \hat{u} = \underline{\partial} \underline{N} \underline{u} = \underline{B} \underline{u}$$

waarbij  $\underline{B}$  een functie van de plaats binnen het element is. Derhalve kunnen we ook schrijven:

$$\underline{\partial} \hat{w} = \underline{\partial} \underline{N} \underline{w} = \underline{B} \underline{w}$$

en substitutie hiervan in de zwakke formulering van het evenwicht levert:

$$\tilde{w}^T \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{\sigma} dV = \tilde{w}^T \left( \int_{V_e} \underline{N}^T \underline{q} dV + \int_{A_e} \underline{N}^T \underline{t} dA \right) \quad \forall \tilde{w}$$

We definiëren nu de kolom met interne krachten voor een element als:

$$\underline{f}_{\tilde{\sigma}} = \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{\sigma} dV$$

en de kolom met externe krachten op een element als:

$$\underline{f}_{\tilde{u}} = \int_{V_e} \underline{N}^T \underline{q} dV + \int_{A_e} \underline{N}^T \underline{t} dA$$

De gediscretiseerde evenwichtvergelijkingen voor een element luiden dan:

$$\underline{f}_{\tilde{\sigma}} = \underline{f}_{\tilde{u}}$$

#### 4.4 Afleiding van de stijfheidsmatrix en de externe krachtenkolom van een element

Omdat  $\underline{\sigma}$  lineair is in  $\underline{\varepsilon}$  kan voor de interne krachten geschreven worden:

$$\underline{f}_{\tilde{\sigma}} = \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{\sigma} dV = \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{\varepsilon} dV = \left( \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \right) \underline{u}_{\tilde{u}}$$

Met de definitie:

$$\underline{K} = \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV$$

resulteert het lineaire stelsel vergelijkingen op elementniveau:

$$\underline{K} \underline{u}_{\tilde{u}} = \underline{f}_{\tilde{u}}$$

We noemen  $\underline{K}$  de element-stijfheidsmatrix.

Voor de berekening van de elementstijfheidsmatrices  $\underline{K}$  moeten de integralen  $\int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV$

berekend worden. Deze integralen worden numeriek bepaald.

Binnen het element worden een aantal punten gekozen, **integratiepunten** genaamd.

De waarde van de integrand in die punten wordt bepaald, en aan die integratiepunten worden

deelvolumes  $V_{ip}$  toegekend, zodanig dat geldt:  $\sum_{ip=1}^{nip} V_{ip} = V_e$ .

Vervolgens wordt gesteld:

$$\underline{K} = \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV = \sum_{ip=1}^{nip} \underline{B}_{ip}^T \underline{D} \underline{B}_{ip} V_{ip} \quad \text{met} \quad \underline{B}_{ip} = \underline{B} \begin{pmatrix} x \\ \sim ip \end{pmatrix}$$

Hierin is  $ip$  het nummer van het integratiepunt en is  $nip$  het aantal integratiepunten van het element. In de volgende paragraaf wordt nader ingegaan op de keuze van de integratiepunten en bijbehorende deelvolumes, en op de nauwkeurigheid van de resultaten van de numerieke integratie.

Voor de bepaling van de externe krachtenkolom  $f_{\sim u} = \int_{V_e} \underline{N}^T q dV + \int_{A_e} \underline{N}^T t dA$  definiëren we het

deel  $f_{\sim q}$  dat de volumebelasting representeert als

$$f_{\sim q} = \int_{V_e} \underline{N}^T q dV$$

en het deel  $f_{\sim p}$  dat de oppervlaktebelasting representeert als

$$f_{\sim p} = \int_{A_e} \underline{N}^T t dA$$

Er geldt dan dus:

$$f_{\sim u} = f_{\sim q} + f_{\sim p}$$

Het deel  $f_{\sim q}$  wordt weer met numerieke integratie bepaald volgens:

$$f_{\sim q} = \sum_{ip=1}^{nip} \underline{N}_{ip}^T q_{\sim ip} V_{ip}$$

De term  $f_{\sim p}$  is of

a. afkomstig van uitwendige randbelasting, deze is ter plaatse van dynamische randvoorwaarden bekend en ter plaatse van kinematische randvoorwaarden onbekend.  
of

b. afkomstig van buurelementen (inwendig). Dan is deze bijdrage aan  $f_{\sim p}$  onbekend maar zal in verband met actie is reactie bij assemblage wegvallen uit  $f_{\sim p}$ .

## 4.5 De bepaling van de verplaatsingen rekken en spanningen

Na assemblage resulteert uiteraard het totale stelsel voor de hele constructie:

$${}^a \underline{K} \underline{u} = \underline{f}$$

Dit lineaire stelsel vergelijkingen kan na verdiscontering van de randcondities zoals in hoofdstuk 1 beschreven is eenvoudig worden opgelost.

Het is bekend welke knooppunten bij een bepaald element horen en daardoor kunnen eenvoudig voor alle elementen de kolommen met verplaatsingen  $\underline{u}$  vastgesteld worden door extractie uit de totale kolom met verplaatsingen  ${}^a \underline{u}$ .

Omdat in verband met de numerieke integratie de matrix  $\underline{B}$  in de integratiepunten moet worden uitgerekend, worden daar ook de rekken en de spanningen berekend.

Vervolgens worden dan in het algemeen de rekken en spanningen in de integratiepunten van alle elementen bepaald. Bovenstaande benaderingsoplossing voor het verplaatsingsveld en het bijbehorende rek-en spanningsveld naderen naar de exacte oplossing bij meshverfijning. Het bewijs hiervan valt buiten het kader van deze cursus.

Het is echter altijd raadzaam om een gedane berekening nog eens met een fijnere mesh te herhalen en te controleren of de waarden van de gewenste grootheden dan nog veranderen op de plaatsen waar u er in geïnteresseerd bent.

## 4.6 Numerieke integratie van de element stijfheidsmatrix

De numerieke integratie zal aan de hand van een 1-D en een 2-D voorbeeld worden behandeld

### 4.6.1 Probleemstelling en globale werkwijze

We beperken ons uitsluitend om de hoeveelheid schrijfwerk te beperken tot het aangeven van de werkwijze voor het bepalen van een numerieke benadering voor lijnintegralen van het type

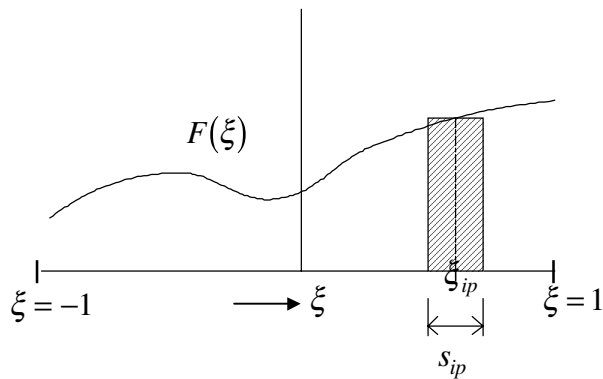
$$I = \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi$$

en oppervlakte-integralen van het type:

$$I = \int_{\eta=-1}^1 \int_{\xi=-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

waarbij  $F(\xi)$  een willekeurige doch bekende functie is van de parameter  $\xi$  en  $F(\xi, \eta)$  van de parameters  $\xi$  en  $\eta$ .

Beschouw eerst de integraal  $I = \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi$  van de functie  $F(\xi)$ .



In een aantal punten (integratiepunten) met  $\xi = \xi_{ip}$  in het gebied  $-1 \leq \xi \leq 1$  kan de functiewaarde  $F(\xi_{ip})$  worden berekend. Door vermenigvuldiging met de lengte van een bijbehorend lijnstukje  $s_{ip}$  en optelling wordt een benadering voor  $I$  verkregen. In formulevorm:

$$I \approx \sum_{ip=1}^{nip} F(\xi_{ip}) s_{ip}$$

De nauwkeurigheid van dit proces zal, behalve van het functieverband  $F(\xi)$  afhangen van het aantal integratiepunten ( $ni$ ), van de positie van de integratiepunten  $\xi_{ip}$  en van een geschikte bijbehorende keuze van de lijnstukjes  $s_{ip}$ .

Opdat een constante "functie"  $F$  exact wordt geïntegreerd zal in ieder geval moeten gelden:

$$\sum_{ip=1}^{nip} s_{ip} = 2.$$

Volgens "Gauss" wordt geprobeerd om met een zo klein mogelijk aantal integratiepunten een polynoom van zo hoog mogelijke graad exact te integreren.

We kiezen hiertoe een set integratiepunten die symmetrisch in het interval  $-1 \leq \xi \leq 1$

liggen. Als we 1 integratiepunt kiezen dan geldt uiteraard  $\xi_1 = 0$ .

Als we twee integratiepunten kiezen dan geldt dus  $\xi_1 = -\alpha$  en  $\xi_2 = \alpha$ .

We gaan nu voor 0<sup>de</sup> tot en met 4<sup>de</sup> orde termen zowel de exacte als de benaderingsoplossing bepalen met 1 respectievelijk 2 integratiepunten.

Orde	Functie	Oplossing bij 1 integratiepunt	Oplossing bij 2 integratiepunten	exacte oplossing
0	$a_0$	$I = 2a_0$ (Goed)	$I = 2a_0$ (Goed)	$I = 2a_0$
1	$a_1\xi$	$I = 0$ (Goed)	$I = 0$ (Goed)	$I = 0$
2	$a_2\xi^2$	$I = 0$ (Fout)	$I = 2\alpha^2 a_2$ (Goed als $\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ )	$I = \frac{2}{3}a_2$
3	$a_3\xi^3$	n.v.t	$I = 0$ (Goed)	$I = 0$
4	$a_4\xi^4$	n.v.t	$I = \frac{2}{9}a_4$ (Fout als $\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ )	$I = \frac{2}{5}a_4$

We zien dus dat bij  $nip=2$  geldt:

$$I_{benaderd} = F\left(\xi = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) + F\left(\xi = \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$$

en dit is correct tot en met 3<sup>e</sup> graads polynomen.

Bij  $nip=3$  kan worden afgeleid:

$$I_{benaderd} = \frac{5}{9}F\left(\xi = -\frac{1}{5}\sqrt{15}\right) + \frac{8}{9}F(\xi = 0) + \frac{5}{9}F\left(\xi = \frac{1}{5}\sqrt{15}\right)$$

en dit is correct tot en met 5<sup>e</sup> graads polynomen.

We generaliseren het voorgaande naar 2 dimensies en we benaderen de integraal

$$I = \int_{\eta=-1}^1 \int_{\xi=-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

met:

$$I \approx \sum_{ip=1}^{nip} F(\xi_{ip}, \eta_{ip}) A_{ip}$$

Opdat een constante "functie"  $F$  exact wordt geïntegreerd zal in ieder geval moeten gelden:

$$\sum_{ip=1}^{nip} A_{ip} = 4.$$

Een andere triviale eis is dat de integratiepunten op regelmatige wijze over het oppervlak verdeeld dienen te zijn.

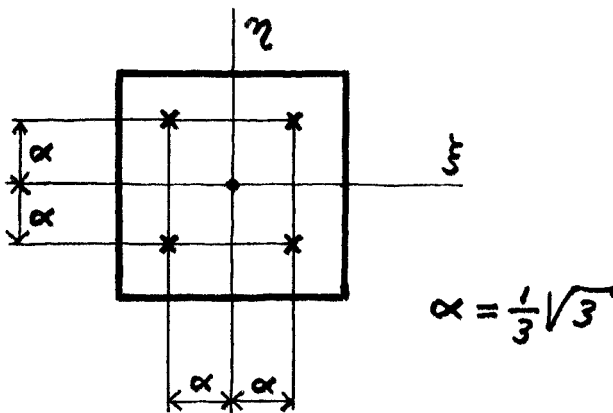
Met 1 integratiepunt geldt:  $\xi_{ip} = \eta_{ip} = 0$ ;  $A_{ip} = 4$  en dit levert een exacte oplossing voor polynomen tot en met de eerste graad in  $\xi$  en  $\eta$ :

$$F = c_1 + c_2\xi + c_3\eta$$

Met 2 integratiepunten geldt:  $\xi_{ip} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ;  $\eta_{ip} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ;  $A_{ip} = 1$  en dit levert een exacte oplossing voor polynomen tot en met de 3<sup>e</sup> graad in  $\xi$  en  $\eta$ :

$$F = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi^2 + c_5\xi\eta + c_6\eta^2 + c_7\xi^3 + c_8\xi^2\eta + c_9\xi\eta^2 + c_{10}\eta^3$$

met  $c_1$  t/m  $c_{10}$  constant:



Als de integrand  $F(\xi, \eta)$  met bovenstaande beschrijving voldoende goed benaderd kan worden, dan is ter bepaling van  $I$  een vierpunts Gauss-integratie geschikt. Wordt een hogere nauwkeurigheid geëist dan zullen meer integratiepunten (bijvoorbeeld 9) voor de berekening van  $I$  noodzakelijk zijn. De rekentijd zal daarbij uiteraard toenemen en het is vaak niet zo erg zinvol in verband met andere benaderingen (bijv. de gehanteerde discretisering in de e.e.m.). We zullen daarop verder niet ingaan.

#### 4.6.2 Toepassing van de numerieke integratie voor de berekening van de stijfheidsmatrix en de externe krachten-kolom van een element

Bij de berekening van de element-stijfheidsmatrix moesten we de volgende integraal uitrekenen:

$$\underline{K} = \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV = \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV$$

Bewezen kan worden dat geldt:

$$dV = \det(\underline{J}) d\xi d\eta d\zeta$$

En hiermee kunnen we dan met  $J = \det(\underline{J})$  de elementstijfheidsmatrix benaderen met:

$$\underline{K} = \int_{\xi=-1, \eta=-1, \zeta=-1}^{\xi=1, \eta=1, \zeta=1} J \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} d\xi d\eta d\zeta = \sum_{ip=1}^{nip} J_{ip} \underline{B}_{ip}^T \underline{D} \underline{B}_{ip} \Xi_{ip}$$

met  $\Xi_{ip}$  het volumedeel van het basiselement dat bij het integratiepunt hoort

Bij 8-punts numerieke integratie geldt:

$$\xi_{ip} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{3}; \quad \eta_{ip} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{3}; \quad \zeta_{ip} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{3} \text{ en } \Xi_{ip} = 1$$

Dus dan geldt:

$$\underline{K} = \sum_{ip=1}^8 J_{ip} \underline{B}_{ip}^T \underline{D} \underline{B}_{ip}$$

Het bewijs voor  $dV = \det(\underline{J}) d\xi d\eta d\zeta$  leveren we hier, in verband met de grote hoeveelheid schrijfwerk in het 3-D geval slechts voor een vlakspanningselement met constante dikte waarvoor overeenkomstig geldt:

$$\underline{K} = \int_{A_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} t dA$$

Hierin is  $t$  de dikte van het element.

Als we er van uitgaan dat de dikte  $t$  constant is, dan is de integrand expliciet uitgedrukt in  $\xi$  en  $\eta$ . Tevens geldt:

$$dA = \det(\underline{J}) d\xi d\eta = J d\xi d\eta$$

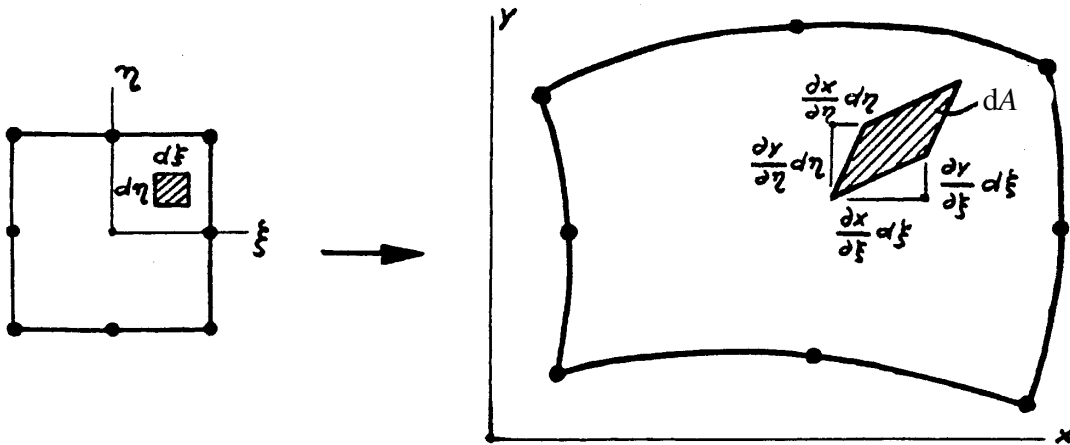
waarmee voor de stijfheidsmatrix volgt:

$$\underline{K} = \int_{\eta=-1}^1 \int_{\xi=-1}^1 \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} J t d\xi d\eta$$



Bewijs:

We beschouwen het oppervlakte-elementje  $d\xi d\eta$  van het basiselement en het daarmee corresponderende oppervlakte-elementje van het werkelijke 2-D element. In onderstaande figuur is dat weergegeven.



Voor oppervlakte-elementje  $dA$  geldt:

$$dA = 2 \left[ \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta - \frac{1}{2} \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta - \frac{1}{2} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi - \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta - \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \right) \right]$$

$$= \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta = \det(\underline{J}) d\xi d\eta = J d\xi d\eta$$

Dus:

$$dA = J d\xi d\eta$$

### 4.6.3 De structuur van een eindige elementen methode programma

Alle ingrediënten voor een eenvoudig e.e.m. programma zijn nu geleverd. De structuur van zo'n programma is hieronder weergegeven. De symbolen en de bijbehorende theorie vindt u in de tussen de haakjes aangegeven hoofdstukken. Niet eerder in de text gebruikte symbolen staan toegelicht op de volgende pagina.

**Invoer:**  ${}^a \underline{x}, \underline{L}, E, \nu, {}^a \underline{\bar{u}}, {}^a \underline{\bar{f}}, q(\underline{x})$  (Voor toelichting zie hoofdstuk nr.)

#### E.e.m programma

Bereken  $\underline{D}(E, \nu)$

Initialiseer  ${}^a \underline{K}$  op  $\underline{0}$  en  ${}^a \underline{f}$  op  $\underline{0}$

Begin loop over ne elementen

Initialiseer  $\underline{K}$  op  $\underline{0}$  en  $\underline{f}$  op  $\underline{0}$

Bepaal  ${}^e \underline{x}$  uit  ${}^a \underline{x}$  en  $\underline{L}$  (4)

Begin loop over nip integratiepunten(ip)

Bereken  $\underline{J}_{ip}$  en  $J_{ip}$  uit  $\underline{x}^k$  en  $(\xi_{ip}, \eta_{ip}, \zeta_{ip})$  (3)

Bereken  $\underline{B}_{ip}$  uit  $\underline{J}_{ip}$  en  $(\xi_{ip}, \eta_{ip}, \zeta_{ip})$  (3+4)

Bepaal  $\underline{K} = \underline{K} + J_{ip} \underline{B}_{ip}^T \underline{D} \underline{B}_{ip} \underline{\Xi}_{ip}$  (4)

Bepaal  $\underline{N}_{ip}^T$  uit  $(\xi_{ip}, \eta_{ip}, \zeta_{ip})$

Bepaal:  $\underline{f} = \underline{f} + J_{ip} \underline{N}_{ip}^T q \underline{\Xi}_{ip}$  (4)

Einde loop over integratiepunten

Assembleer  ${}^a \underline{K} = {}^a \underline{K} + {}^a \underline{K}$  en  ${}^a \underline{f} = {}^a \underline{f} + \underline{f}$  (1)

Einde loop over elementen

Bereken  ${}^a \underline{f} = {}^a \underline{f} + {}^a \underline{\bar{f}}$  (1+4)

Bewerk  ${}^a \underline{K}$  en  ${}^a \underline{f}$  tot  ${}^a \underline{K}$  en  ${}^a \underline{f}$  (m.b.v.  ${}^a \underline{\bar{u}}$ ) (1)

Los het stelsel  ${}^a \underline{K} {}^a \underline{u} = {}^a \underline{f}$  op en stel  ${}^a \underline{u}$  op (1) **Uitvoer:**  ${}^a \underline{u}$

Bereken  ${}^a \underline{f}$  uit  ${}^a \underline{K} {}^a \underline{u} = {}^a \underline{f}$  (1) **Uitvoer:**  ${}^a \underline{f}$

Begin loop over elementen

Bepaal  $\underline{u}$  uit  ${}^a \underline{u}$  via de lokatiematrix  $\underline{L}$  (4)

Begin loop over integratiepunten

Bereken de rekken uit  $\underline{\varepsilon} = \underline{B}_{ip} \underline{u}$  (3) **Uitvoer:**  $\underline{\varepsilon}$

Bereken de spanningen uit  $\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$  (3) **Uitvoer:**  $\underline{\sigma}$

Einde loop over integratiepunten

Einde loop over elementen

Verklaring van de symbolen voor zo ver ze niet in de voorafgaande text zijn genoemd.

${}^a \underline{x}$	De matrix met coördinaten van de knooppunten
$\underline{L}$	De lokatiematrix; dat is de matrix waarin de globale knooppuntsnummers aan de elementnummers worden gekoppeld
${}^a \underline{\bar{u}}$ ~	De voorgeschreven verplaatsingen van de constructie
${}^a \underline{\bar{f}}$ ~	De voorgeschreven krachten op de constructie
${}^e \underline{x}$ ~	De globale knooppuntscoördinaten van een element
$J_{ip} \underline{N}_{ip}^T q \underline{\Xi}_{ip}$ ~ $ip$	De integratiepuntbijdrage van de volumebelasting
$* \underline{K}$	De geëxpandeerde elementstijfheidsmatrix met afmetingen $nvg * nvg$ met $nvg$ het totale aantal vrijheidsgraden van de constructie, waarin de elementbijdragen meteen op de goede plaats worden ingevuld d.w.z. bij de juiste globale knooppuntsnummers worden ingevuld.
$\underline{f}$ * ~ $q$	De kolom met lengte $nvg$ waarin de elementbijdragen van de volumebelasting aan de totale externe belastingskolom meteen op de goede plaats worden ingevuld d.w.z. bij de juiste globale knooppuntsnummers wordt ingevuld.
${}^a \underline{K}$ $\alpha$ ~	De matrix met grote getallen op de diagonaalmatrix ter plaatse van de voorgeschreven vrijheidsgraden. zie par. 1.2.1.2
${}^a \underline{f}$ $\alpha$ ~	De bijbehorende krachtenkolom. zie par. 1.2.1.2
${}^a \underline{K} \underline{u} = \underline{f}$ $\alpha$ ~ $\alpha$ ~	Het op te lossen stelsel volgens par. 1.2.1.2

# Hoofdstuk 5

## Dynamica

### 5.1 De bewegingsvergelijkingen

De bewegingsvergelijkingen volgens Newton schrijven we voor een 3-D continuüm (dat we vanwege de eenvoud als voorbeeld kiezen) in differentiaalformulering als volgt:

$$\underline{\partial}^T \underline{\sigma} + \underline{q} = \rho \underline{\ddot{u}}$$

Hierin is de term  $\rho \underline{\ddot{u}}$  de traagheidsterm, met  $\rho$  de massadichtheid en  $\underline{\ddot{u}}$  de lokale versnelling..

#### 5.1.1 De zwakke formulering van de bewegingsvergelijkingen

De gewogen afwijkingen formulering van de bewegingsvergelijking voor een element luidt dan:

$$\int_{V_e} \hat{w}^T(x) \left( \underline{\partial}^T \underline{\sigma} + \underline{q} - \rho \underline{\ddot{u}} \right) dV = 0 \quad \forall \hat{w}$$

Toepassing van het divergentietheorema van Gauss levert dan overeenkomstig de formulering in hoofdstuk 4 voor het statische geval, maar dan aangevuld met een traagheidsterm, de zgn. zwakke formulering van de bewegingsvergelijking:

$$\int_{V_e} \hat{w}^T \rho \underline{\ddot{u}} dV + \int_{V_e} \left( \underline{\partial} \hat{w} \right)^T \underline{\sigma} dV = \int_{V_e} \hat{w}^T \underline{q} dV + \int_{A_e^*} \hat{w}^T t dA \quad \forall \hat{w}$$

#### 5.1.2 Eindige elementen discretisatie

Bij een discretisering volgens hoofdstuk 3 vinden we

$$\underline{w}^T \int_{V_e} \underline{\rho} \underline{N}^T \underline{N} dV \underline{\ddot{u}} + \underline{w}^T \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{\sigma} dV = \underline{w}^T \left[ \int_{V_e} \underline{N}^T \underline{q} dV + \int_{A_e^*} \underline{N}^T t dA \right] \quad \forall \underline{w}$$

Met de definities van de massamatrix  $\underline{M}$

$$\underline{M} = \int_{V_e} \underline{\rho} \underline{N}^T \underline{N} dV$$

de kolom met interne krachten  $\underline{f}_{\sim\sigma}$

$$\underline{f}_{\sim\sigma} = \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{\sigma} dV = \underline{K} \underline{u}_{\sim}$$

met

$$\underline{K} = \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV$$

en de kolom met externe krachten  $\underline{f}_{\sim u}$

$$\underline{f}_{\sim u} = \int_{V_e} \underline{N}^T q dV + \int_{A_e} \underline{N}^T t dA$$

kunnen we de gediscretiseerde bewegingsvergelijking schrijven als een lineair stelsel gekoppelde gewone differentiaalvergelijkingen in de tijd  $t$ .

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}_{\sim} + \underline{K} \underline{u}_{\sim} = \underline{f}_{\sim u}$$

Bij aanwezigheid van demping kunnen we de interne wrijving (viscositeit) in rekening brengen via een lineair viscoëlastisch materiaal waarvoor met  $\underline{V}$  een matrix met dempingsparameters geldt:

$$\underline{\sigma}_{\sim} = \underline{D} \underline{\varepsilon}_{\sim} + \underline{V} \dot{\underline{\varepsilon}}_{\sim} = \underline{D} \underline{B} \underline{u}_{\sim} + \underline{V} \underline{B} \dot{\underline{u}}_{\sim}$$

Substitutie hiervan in de bovenstaande uitdrukking voor de interne krachten levert dan het stelsel gediscretiseerde evenwichtsvergelijkingen met demping:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}_{\sim} + \underline{C} \dot{\underline{u}}_{\sim} + \underline{K} \underline{u}_{\sim} = \underline{f}_{\sim}(t)$$

Met de definitie van de dempingsmatrix  $\underline{C}$  volgens:

$$\underline{C} = \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{V} \underline{B} dV$$

In plaats van  $\underline{f}_{\sim}$  is ter vereenvoudiging  $\underline{f}_{\sim}(t)$  genoteerd.

De matrix  $\underline{V}$  is hier formeel ingevoerd en is in het algemeen onbekend.

Voor bij zeer veel vrijheidsgraden zal in de te bespreken oplossingsmethoden vaak met weinig verlies van nauwkeurigheid, maar met veel minder rekenwerk, gewerkt kunnen worden met de zogenaamde diagonale “lumped” massamatrix. Dit levert dan i.h.a. een geringe

onderschatting van de natuurlijke eigenhoekfrequenties in tegenstelling tot de consistente massamatrix die een geringe overschatting daarvan oplevert.

De massa wordt simpelweg verdeeld en als puntmassa's in de knooppunten gelegd.

Na assemblage verkrijgen we het op te lossen stelsel van de gehele constructie:

$${}^a \underline{M} {}^a \ddot{u} + {}^a \underline{C} {}^a \dot{u} + {}^a \underline{K} {}^a u = {}^a f(t)$$

In verband met de reductie van de hoeveelheid schrijfwerk zullen we de indices  ${}^a$  in het vervolg weer weglaten en schrijven we voor het geassembleerde stelsel eveneens

$$\underline{M} \ddot{u} + \underline{C} \dot{u} + \underline{K} u = f(t)$$

Om de drie hierin voorkomende matrices te interpreteren kunnen we dit stelsel vermenigvuldigen met  $\dot{u}^T$  en we krijgen dan:

$$\dot{u}^T \underline{M} \ddot{u} + \dot{u}^T \underline{C} \dot{u} + \dot{u}^T \underline{K} u = \dot{u}^T f(t)$$

We zien hier nu een vermogensbalansvergelijking staan:

De verandering per tijdseenheid van de kinetische energie  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{u}^T \underline{M} \dot{u} \right)$  plus het gedissipeerde vermogen plus de verandering per tijdseenheid van de elastische energie  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} u^T \underline{K} u \right)$  is gelijk aan het toegevoegde extern vermogen.

Volgens de fysica (thermodynamica) moeten  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  en  $\underline{K}$  (semi-) positief definitief zijn. Het stelsel wordt nog zodanig gereduceerd dat  $u$  geheel onbekend is en  $f(t)$  bekend.

## 5.2 Oplossingsstrategieën

Er zijn een groot aantal oplossingsstrategieën, en de keuze van een strategie is onder meer afhankelijk van de aard van de belasting, de grootte van het aantal vrijheidsgraden en de aard van de resultaten die verlangd worden. De volgende methoden worden besproken.

- **Eigenwaarde analyse** voor het vrije ongedempte trillingsgedrag van een constructie.
- **Modale analyse** voor de bepaling van het tijdsafhankelijke (transient) gedrag bij niet-impulsieve belasting op basis van de resultaten van een eigenwaarde analyse.
- **Harmonische analyse** voor de bepaling van het stationaire gedrag bij periodieke belasting.
- **Numerieke tijdsintegratie** voor de bepaling van het tijdsafhankelijke (transient) gedrag van een constructie met een willekeurige belasting.

### 5.2.1 Eigenwaarde analyse voor het vrije ongedempte trillingsgedrag

Het vrije trillingsgedrag bij lineaire systemen wordt gekarakteriseerd door de vergelijking

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{C} \dot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} = \underline{0}$$

Als er geen systeemdamping is dan wordt dit

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} = \underline{0}$$

Als homogene oplossing proberen we

$$\underline{u} = \text{Re}\{\tilde{\underline{u}}(e^{i\omega t})\}$$

met  $\tilde{\underline{u}}$  een kolom met (reële, imaginaire of complexe) amplitudes,  $\omega$  de hoekfrequentie van de harmonische respons. Dit levert dan:

$$\text{Re}\{(\underline{K} - \underline{M}\omega^2)\tilde{\underline{u}}e^{i\omega t}\} = \underline{0} \quad \forall t \Rightarrow (\underline{K} - \underline{M}\omega^2)\tilde{\underline{u}} = \underline{0}$$

Voor de niet-triviale oplossing moet dus gelden:

$$\det(\underline{K} - \underline{M}\omega^2) = 0 \quad \text{of} \quad \det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0$$

dit is een  $n^{\text{de}}$  graads vergelijking voor  $\lambda$  met  $\lambda = \omega^2$ ,  $\underline{A} = \underline{M}^{-1}\underline{K}$  en  $\underline{I}$  de eenheidsmatrix. Uiteraard moet de massamatrix dan regulier zijn, hetgeen het geval is als met alle vrijheidsgraden massa is geassocieerd.

De oplossing kan i.h.a. geschreven worden in de vorm van  $n$  reële eigenparen  $\{\lambda_j, \underline{u}_{\sim j}\}$  met  $n$  het aantal vrijheidsgraden van de constructie. Voor de oplossingen  $\underline{u}_{\sim j}$  geldt :

$$\underline{A} \underline{u}_{\sim j} = \lambda_j \underline{u}_{\sim j} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

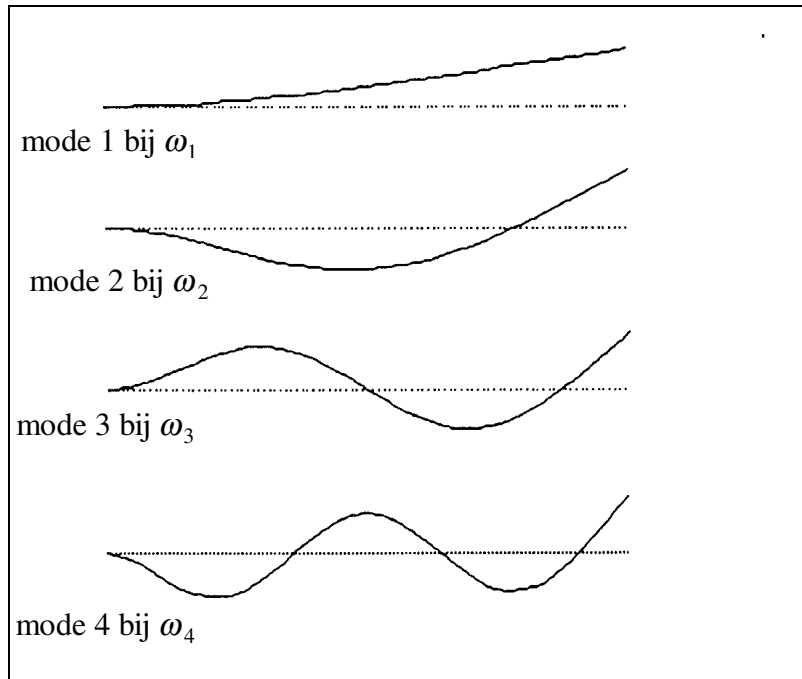
De eigenwaarden  $\lambda_j$  zijn de oplossingen van de karakteristieke vergelijking

$$p(\lambda) = \det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0$$

en zijn positief omdat  $\underline{K}$  en  $\underline{M}$  positief definitief zijn (mits de beweging als star lichaam van de constructie onderdrukt is).

De eigenwaarden  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  worden zo gerangschikt dat geldt: als  $i < j$  dan  $\lambda_i < \lambda_j$ .

Voor de eigenhoekfrequenties geldt dan uiteraard  $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$ . De bijbehorende eigenkolommen  $\underline{u}_{\sim j}$  worden wel de “modes” genoemd (zie bijv. onderstaande figuur).



De vier trillingsvormen (modes) bij de vier laagste eigenfrequenties van een aan de linkerzijde ingeklemde balk met  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4$

De eigenkolommen zijn op een constante factor na bepaald en zijn daarom vaak geschaald, bijvoorbeeld door de grootste component de waarde 1 te geven.

We kunnen de eigenkolommen ook zo normeren dat geldt:

$$\underset{\sim i}{u}^T \underset{\sim i}{M} u = 1 \quad \text{of} \quad \underset{\sim i}{u}^T \underset{\sim i}{K} u = 1$$

We zeggen dan: de eigenkolommen zijn **genormeerd met de massamatrix als kern**, respectievelijk **met de stijfheidsmatrix als kern**. Anders dan in de statica is het vrij gebruikelijk dat bij een eigenwaarde analyse de beweging als star lichaam niet onderdrukt is. De stijfheidsmatrix is dan singulier en starre lichaamsverplaatsingen verschijnen als niet triviale oplossingen met eigenhoekfrequentie 0.

Vanwege de symmetrie van  $\underline{M}$  en  $\underline{K}$  geldt voor ieder paar eigenkolommen  $\underset{\sim i}{u}$  en  $\underset{\sim j}{u}$ :

$$\underset{\sim i}{u}^T (\underline{K} - \lambda_j \underline{M}) \underset{\sim j}{u} = \underset{\sim j}{u}^T (\underline{K} - \lambda_i \underline{M}) \underset{\sim i}{u} = 0$$

en ook

$$\underset{\sim j}{u}^T (\underline{K} - \lambda_i \underline{M}) \underset{\sim i}{u} = 0$$

Aftrekken van de beide linkerleden levert dan:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \underset{\sim j}{u}^T \underset{\sim i}{M} u = 0$$



Hieruit volgen dan de zogenaamde **orthogonaliteitseigenschappen van de eigenkolommen**:

$$\boxed{u_{\sim j}^T \underline{M} u_{\sim i} = 0 \quad \text{en} \quad u_{\sim j}^T \underline{K} u_{\sim i} = 0 \quad \text{als } \lambda_i \neq \lambda_j}$$

Het aantal eigenhoekfrequenties is gelijk aan het aantal vrijheidsgraden van het systeem. Er worden vele verschillende methoden voor het bepalen van de eigenwaarden toegepast. Voor trillingsproblemen in de werktuigbouwkunde zijn de laagste eigenfrequenties in het spectrum van eigenfrequenties in het algemeen het meest interessant. In de meeste gevallen worden daarom maximaal  $\pm 30$  eigenwaarden meegenomen in de analyse. Uitzonderingen hierop zijn:

- Accoustische problemen waarbij de hoge frequenties van belang zijn.
- Hoge excitatie frequenties, bijvoorbeeld bij explosies.
- Bij structuren met hoge modale dichtheid (veel bijna samenvallende eigenhoekfrequenties).

### 5.2.2 “Transient” oplossingen met de modale superpositie methode

Bij een willekeurig tijdsafhankelijke belasting kunnen we een oplossingsmethode toepassen waarbij gebruik gemaakt wordt van de resultaten van een eigenwaarde analyse. Bij deze modale superpositie methode gaan we uiteraard uit van de gediscretiseerde bewegingsvergelijking:

$$\underline{M} \ddot{u} + \underline{C} \dot{u} + \underline{K} u = f(t)$$

en de respons van een systeem wordt geschreven als een gewogen som van de eigentrillingsvormen:

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i(t) u_{\sim i} \quad i = 1, \dots, n$$

De tijdsafhankelijke weegfactoren  $\eta_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , worden ook wel participatiefuncties genoemd en de participatiefunctie  $\eta_m(t)$  geeft aan hoe sterk de mode  $u_{\sim m}$  als functie van de tijd participeert in de oplossing  $u(t)$ .

We introduceren nu terwille van een compacte schrijfwijze een aantal matrices;

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} u_{\sim 1} & u_{\sim 2} & \dots & u_{\sim p} \end{bmatrix} \quad (n \times p \text{ matrix; } p \leq n)$$

met de eerste  $p$  eigenkolommen en de diagonaalmatrix  $\underline{\Lambda}$  met de eerste  $p$  eigenwaarden:

$$\underline{\Lambda} \stackrel{\text{Def}}{=} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_p \end{bmatrix}$$

Dan geldt:

$$\underline{K}\underline{\Phi} = \underline{M}\underline{\Phi}\underline{\Lambda}$$

We normeren  $\underline{\Phi}$  met de massamatrix  $\underline{M}$  als kern. Dan kunnen we de orthogonaliteitseigenschappen samenvatten door te schrijven:

$$\underline{M}_m \stackrel{\text{Def}}{=} \underline{\Phi}^T \underline{M} \underline{\Phi} = \underline{I} \quad \text{en} \quad \underline{K}_m \stackrel{\text{Def}}{=} \underline{\Phi}^T \underline{K} \underline{\Phi} = \underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & \lambda_p \end{bmatrix}$$

We noemen de (de  $p \times p$  diagonaalmatrix)  $\underline{M}_m = \underline{I}$  de (gereduceerde) modale massamatrix op basis van  $p$  eigenkolommen bij normering met de massamatrix als kern.

We noemen de ( $p \times p$  diagonaalmatrix)  $\underline{K}_m = \underline{\Lambda}$  de (gereduceerde) modale stijfheidsmatrix op basis van  $p$  eigenkolommen bij normering met de massamatrix als kern.

De dempingsmatrix is meestal onbekend. Voor de dempingsmatrix wordt om rekentechnische redenen, hoewel daar geen harde fysische rechtvaardiging voor te vinden is, **aangenomen** dat die evenals de massamatrix en de stijfheidsmatrix symmetrisch is en aan de orthogonaliteitseis voldoet. D.w.z. we nemen aan dat dus ook geldt

$$\underset{\sim j}{u}^T \underset{\sim i}{C} u = 0 \quad \text{als } \lambda_i \neq \lambda_j$$

We definiëren de diagonaalmatrix:

$$\underline{C}_m = \underline{\Phi}^T \underline{C} \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & c_p \end{bmatrix}$$

en we noemen  $\underline{C}_m$  de (gereduceerde) modale dempingsmatrix op basis van  $p$  eigenkolommen bij normering met de massamatrix als kern.

Bij praktische problemen kennen we niet de dempingsmatrix. Ter versimpeling van het rekenwerk wordt veelal, bijvoorbeeld bij metalen, de veronderstelling gedaan dat de dempingsmatrix een lineaire combinatie is van de massamatrix en de stijfheidsmatrix:

$$\underline{C} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K}$$

met  $\alpha$  en  $\beta$  nader te bepalen constanten. Dit staat bekend onder de naam **Rayleigh damping**. Er is dan automatisch voldaan aan de orthogonaliteits-eis voor  $\underline{C}$  om bij modale analyse uiteindelijk een ontkoppeld stelsel te krijgen (de modale dempingsmatrix wordt dan een diagonaalmatrix).

We kunnen nu de als benaderingsoplossing van het stelsel nu compact schrijven:

$$\boxed{\tilde{u}(t) = \underline{\Phi} \tilde{\eta}(t)}$$
 benadering bij  $p < n$ , exact als  $p = n$

Substitutie hiervan in de gediscretiseerde bewegingsvergelijkingen levert dan na voorvermenigvuldiging met  $\underline{\Phi}^T$  (ook nodig om evenveel vergelijkingen als onbekenden te krijgen):

$$\underline{\Phi}^T \underline{M} \underline{\Phi} \ddot{\tilde{\eta}}(t) + \underline{\Phi}^T \underline{C} \underline{\Phi} \dot{\tilde{\eta}}(t) + \underline{\Phi}^T \underline{K} \underline{\Phi} \tilde{\eta}(t) = \underline{\Phi}^T f(t)$$

Wanneer de eigenkolommen genormeerd zijn met de massamatrix als kern levert dit:

$$\ddot{\tilde{\eta}}(t) + \underline{C}_m \dot{\tilde{\eta}}(t) + \underline{\Lambda} \tilde{\eta}(t) = \underline{\Phi}^T f(t) \stackrel{Def}{=} \tilde{q}(t)$$

Dit zijn  $n$  ontkoppelde vergelijkingen die identiek zijn aan de tweede orde bewegingsvergelijking van een enkelvoudige massa-veer-demper systeem met zogenaamde modale massa  $m_m = 1$ , modale demping  $c_m$ , modale stijfheid  $k_m = \lambda_m = \omega_m^2$  en modale belasting  $q_m(t)$ .

In analogie met het enkelvoudige massa veer-demper(parallel) systeem definiëren we de modale dempingscoëfficiënt  $\xi_m$  bij mode  $m$  met de vergelijking:

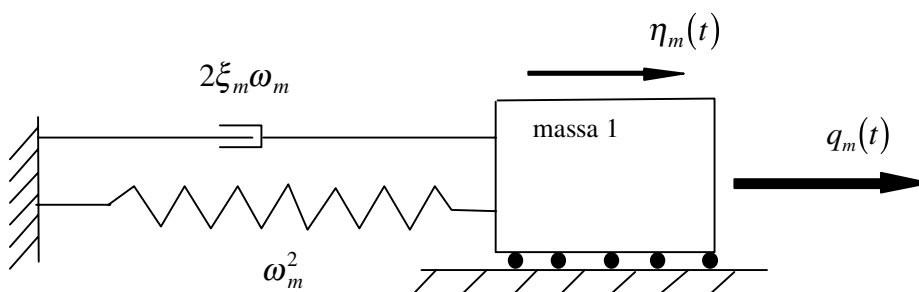
$$c_m = 2\omega_m \xi_m$$

De waarden van de modale dempingscoëfficiënten  $\xi_m$  kunnen verkregen worden uit

- metingen bij de beschouwde modes
- energiedissipatie karakteristieken van materialen
- gegevens van vergelijkbare constructies (eventueel uit de literatuur)

Als  $\xi_m = 1$  is deze mode kritisch gedempt.

In onderstaande figuur is schematisch weergegeven met welk mechanisch systeem ieder van de ontkoppelde vergelijkingen overeenkomt.



De vergelijking die de participatiecoëfficiënt bij mode  $m$  beschrijft luidt:

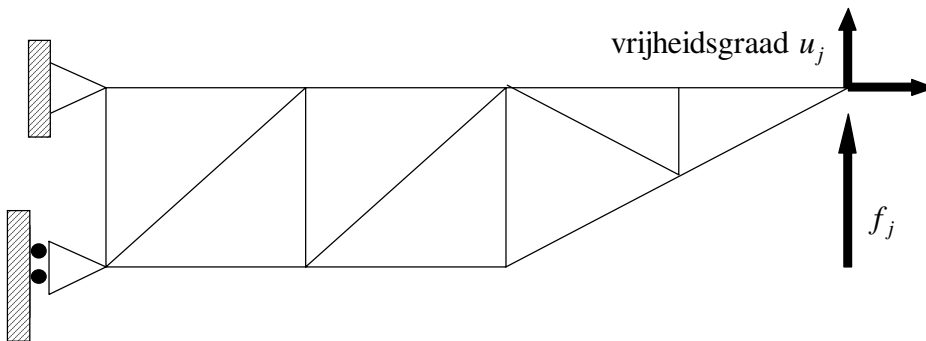
$$\ddot{\eta}_m + 2\xi_m \omega_m \dot{\eta}_m + \omega_m^2 \eta_m = q_m(t)$$

Deze 2e orde DV moet voor de  $p$  modes opgelost worden en levert dan de kolom  $\tilde{\eta}(t)$  waarmee de oplossing voor  $\tilde{u}(t)$  direct gevonden kan worden.

### 5.2.3 “Steady state” oplossingen bij periodieke excitatie

Bij een **harmonische excitatie** wordt bij vrijheidsgraad  $j$  een harmonische kracht geassocieerd waarvoor geldt:

$$f_j = \text{Re} \{ \tilde{f}_j e^{i\omega t} \}$$



Hierin is  $\tilde{f}_j$  de (eventueel complexe) amplitude van de belasting bij vrijheidsgraad  $j$ , zodat voor het rechterlid in de (gereduceerde) gediscretiseerde bewegingsvergelijking geldt:

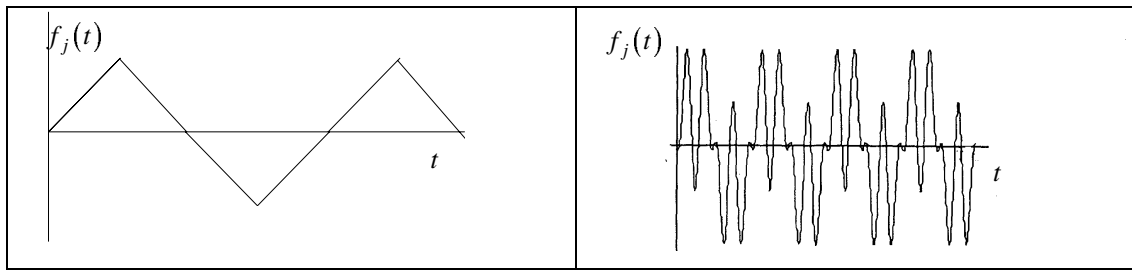
$$\tilde{f}^T(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \text{Re} \{ \tilde{f}_j e^{i\omega t} \} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bij **niet-harmonische periodieke excitatie in één vrijheidsgraad** kunnen we de belasting m.b.v Fourier analyse vervangen door een afgekapte reeks met  $nh$  Fourier termen:

$$f_j = \sum_{h=1}^{nh} \text{Re} \{ \tilde{f}_{j,h} e^{ih\omega t} \}$$

waarbij we het rechterlid als volgt kunnen formuleren:

$$\tilde{f}^T(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \sum_{h=1}^{nh} \text{Re} \{ \tilde{f}_{j,h} e^{ih\omega t} \} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Periodieke belastingen.

We kunnen vanwege de lineariteit van het probleem simpel het principe van superpositie toepassen voor de verschillende Fourier-termen.

Bij harmonische excitaties in meerdere vrijheidsgraden met ongelijke excitatie-frequenties en/of niet-harmonische periodieke excitaties kunnen we ook weer het principe van superpositie toepassen. We hoeven dus slechts de harmonische excitatie van een vrijheidsgraad te bestuderen.

### 5.2.3.1 Harmonische analyse op basis van modale analyse

Het modale stelsel modale bewegingsvergelijkingen luidt:

$$\ddot{\tilde{\eta}}(t) + \underline{C}_m \dot{\tilde{\eta}}(t) + \underline{\Lambda} \tilde{\eta}(t) = \underline{\Phi}^T \overset{Def}{\tilde{f}}(t) = \tilde{q}(t)$$

met

$$\tilde{q} = \underline{\Phi}^T \tilde{f}(t) \text{ en } \tilde{f}(t) = \mathbf{Re} \left\{ \tilde{f} e^{i\omega t} \right\}$$

en we kunnen voor het rechterlid  $\tilde{q}(t)$  schrijven:

$$\tilde{q}(t) = \mathbf{Re} \left\{ \tilde{q} e^{i\omega t} \right\}$$

met  $\tilde{q}$  een kolom met complexe amplitudes van de componenten van  $\tilde{q}(t)$ .

Het inschakelverschijnsel wordt verwaarloosd doordat dat op den duur uitdempt en daarom zijn er geen begincondities nodig voor de oplossing. We kunnen dan voor de oplossing meteen schrijven:

$$\tilde{\eta}(t) = \mathbf{Re} \left\{ \tilde{\eta} e^{i\omega t} \right\}$$

Substitutie in de modale bewegingsvergelijkingen levert dan:

$$\mathbf{Re} \left\{ \left( -\omega^2 \underline{I} + i\omega \underline{C}_m + \underline{\Lambda} \right) \tilde{\eta} e^{i\omega t} \right\} = \mathbf{Re} \left\{ \tilde{q} e^{i\omega t} \right\} \quad \forall t$$

dus geldt ook

$$\left(-\omega^2 \underline{I} + i\omega \underline{C}_m + \underline{A}\right) \tilde{\eta} = \tilde{q}$$

voor de  $k^{\text{de}}$  component geldt de modale vergelijking:

$$\left(-\omega^2 + i\omega c_k + \omega_k^2\right) \tilde{\eta}_k = \tilde{q}_k$$

We schrijven de complexe grootheden als de som van een reëel en een imaginair deel:

$$\tilde{\eta}_k = \tilde{\eta}_{kr} + i\tilde{\eta}_{ki} \quad \text{en} \quad \tilde{q}_k = \tilde{q}_{kr} + i\tilde{q}_{ki}$$

en substitueren dat in de modale vergelijking. Dit levert dan:

$$\left(\omega_k^2 - \omega^2\right) \tilde{\eta}_{kr} - \omega c_k \tilde{\eta}_{ki} = \tilde{q}_{kr}$$

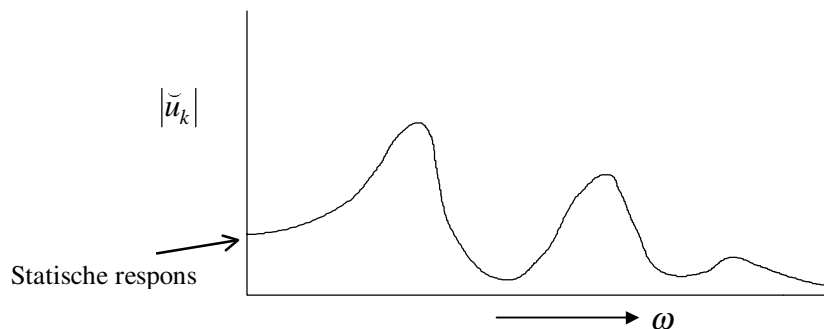
$$\omega c_k \tilde{\eta}_{kr} + \left(\omega_k^2 - \omega^2\right) \tilde{\eta}_{ki} = \tilde{q}_{ki}$$

Dit zijn 2 vergelijkingen met twee onbekende functies  $\tilde{\eta}_{kr}(\omega)$  en  $\tilde{\eta}_{ki}(\omega)$  van de hoekfrequentie  $\omega$  van de excitatie. Bij iedere waarde van  $\omega$  vinden we dus een  $\tilde{\eta}_k$ .

Als we dat voor iedere waarde van  $k$  doen dan vinden we :

$$\tilde{u} = \underline{\Phi}^T \tilde{\eta}$$

De amplitudoverhoudingen  $\frac{|\tilde{u}_k|}{|\tilde{f}_k|}$  en fase verschuivingen  $\arg(\tilde{u}_k) - \arg(\tilde{f}_k)$  zijn hieruit eenvoudig te bepalen. Bij een gegeven  $\tilde{f}$  ziet  $|\tilde{u}_k|$  er bijvoorbeeld als volgt uit als functie van  $\omega$ :



### 5.2.3.2 Harmonische analyse met de directe methode

We kunnen de harmonische respons ook zonder eigenwaarde analyse bepalen. Voor het rechterlid van de gediscretiseerde bewegingsvergelijking

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{C} \dot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} = \underline{f}(t)$$

geldt weer

$$\underline{f}(t) = \text{Re} \left\{ \underline{\check{f}} e^{i\omega t} \right\}$$

met  $\underline{\check{f}}$  een kolom met complexe amplitudes van de componenten van  $\underline{f}(t)$ . We nemen aan dat de verplaatsingsrespons van de volgende vorm is:

$$\underline{u}(t) = \text{Re} \left\{ \underline{\check{u}} e^{i\omega t} \right\}$$

met  $\underline{\check{u}}$  een kolom met complexe amplitudes van de componenten van  $\underline{u}(t)$ .

Substitutie in de gediscretiseerde evenwichtsvergelijking levert de complexe overdrachtsfunctie die de relatie legt tussen de complexe amplitudes van de knooppuntsverplaatsingen en de amplitude van de excitatie:

$$\underline{\check{u}} = \left( -\omega^2 \underline{M} + i\omega \underline{C} + \underline{K} \right)^{-1} \underline{\check{f}}$$

Dit is een stelsel gekoppelde **complexe** vergelijkingen. We splitsen  $\underline{\check{f}}$  en  $\underline{\check{u}}$  ieder in een reëel deel en een imaginair deel volgens:

$$\underline{\check{f}} = \underline{\check{f}}_r + i \underline{\check{f}}_i \quad \text{en} \quad \underline{\check{u}} = \underline{\check{u}}_r + i \underline{\check{u}}_i$$

Substitutie in bovenstaand stelsel levert dan de volgende  $2n$  **reële** vergelijkingen:

$$\begin{bmatrix} \underline{K} - \omega^2 \underline{M} & -\omega \underline{C} \\ \omega \underline{C} & \underline{K} - \omega^2 \underline{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\check{u}}_r \\ \underline{\check{u}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\check{f}}_r \\ \underline{\check{f}}_i \end{bmatrix}$$

Bij periodieke excitatie in een of meerdere knooppunten moet het stelsel voor iedere numerieke waarde van  $\omega$  en voor iedere Fourierterm opgelost worden. Dit leidt dan tot veel rekenwerk. Het voordeel is dat er geen voorafgaande eigenwaarde analyse hoeft plaats te vinden. Bij veel waarden van  $\omega$  zal in het algemeen voor de modale superpositie methode gekozen worden.

## 5.2.4 “Transient” oplossingen met numerieke tijdsintegratie

Bij de directe integratie of stapsgewijze benadering wordt de dynamische respons bepaald op discrete tijdstippen met een onderlinge verschil  $\Delta t$ . Er bestaan vele zeer geavanceerde integratie methoden maar in deze cursus zullen we ons beperken tot enkele eenvoudige klassieke algoritmes om de globale gang van zaken en specifieke problemen bij die methodes te verduidelijken. We definiëren de reeks met tijdstippen:

$$t_0 = 0, t_1 = \Delta t, t_2 = 2\Delta t, \dots, t_{n-1} = (n-1)\Delta t, t_n = n\Delta t, t_{n+1} = (n+1)\Delta t, \dots$$

En we bepalen, uitgaande van de bekende waarden uit het verleden  $\underline{u}(t_i), \underline{\dot{u}}(t_i)$  en  $\underline{\ddot{u}}(t_i)$ , met  $0 \leq i \leq n$  de waarde van  $\underline{u}(t_{n+1}), \underline{\dot{u}}(t_{n+1})$  en  $\underline{\ddot{u}}(t_{n+1})$

We passen hiervoor een integratieschema toe waarbij we gebruik maken van de gediscretiseerde bewegingsvergelijking.

De keuze van het integratieschema is geheel afhankelijk van de gewenste

- efficiëntie
- nauwkeurigheid en
- stabiliteit

Met nauwkeurigheid bedoelen we de mate waarin het antwoord lijkt op de exacte oplossing en met stabiliteit bedoelen we dat de afwijking van de exacte oplossing niet steeds verder aangroeit. Deze begrippen zullen in de volgende paragrafen nog nader toegelicht worden. Er wordt traditioneel onderscheid gemaakt tussen zogenaamde **expliciete** en **impliciete** integratie schema's. Bij een expliciet schema wordt de oplossing op tijdstip  $t_{n+1}$  verkregen door gebruik te maken van de bewegingsvergelijking op tijdstip  $t_n$ :

$$\underline{M} \underline{\ddot{u}}(t_n) + \underline{C} \underline{\dot{u}}(t_n) + \underline{K} \underline{u}(t_n) = \underline{f}(t_n)$$

Bij een impliciet schema wordt de oplossing op tijdstip  $t_{n+1}$  verkregen door gebruik te maken van de bewegingsvergelijking op tijdstip  $t_{n+1}$ :

$$\underline{M} \underline{\ddot{u}}(t_{n+1}) + \underline{C} \underline{\dot{u}}(t_{n+1}) + \underline{K} \underline{u}(t_{n+1}) = \underline{f}(t_{n+1})$$

De beide methoden hebben ieder hun specifieke eigenschappen met betrekking tot bovengenoemde aspecten.

### 5.2.4.1 De expliciete centrale differentie methode

Bij de centrale differentie methode wordt de respons op  $t_{n+1}$  wordt bepaald door te eisen dat op tijdstip  $t_n$  voldaan is aan de gediscretiseerde bewegingsvergelijking.

Uitgangspunt zal zijn de bewegingsvergelijking op tijdstip  $t_n$ .

Met de definities:

$$\underline{u}_{\tilde{n}} = \underline{u}(t_n), \underline{\dot{u}}_{\tilde{n}} = \underline{\dot{u}}(t_n), \underline{\ddot{u}}_{\tilde{n}} = \underline{\ddot{u}}(t_n) \text{ en } \underline{f}_{\tilde{n}} = \underline{f}(t_n)$$

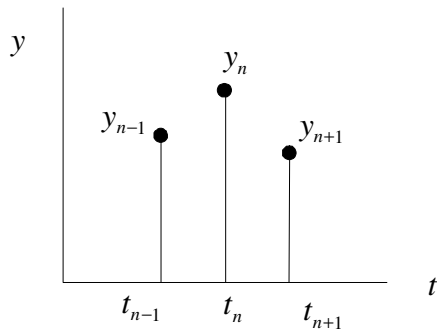


geldt dan voor de bewegingsvergelijking op tijdstip  $t_n$ :

$$\underline{M} \ddot{u}_{\sim n} + \underline{C} \dot{u}_{\sim n} + \underline{K} u_{\sim n} = f_{\sim n}.$$

### **Intermezzo**

Beschouw eerst een scalaire functie  $y = y(t)$  op de drie tijdstippen  $t_{n-1}$ ,  $t_n$  en  $t_{n+1}$ .



Eenvoudig is in te zien dat de volgende kwadratische interpolatie voldoet:

$$y(t) = \frac{(t-t_n)(t-t_{n+1})}{2\Delta t^2} y_{n-1} + \frac{(t-t_{n-1})(t-t_{n+1})}{-\Delta t^2} y_n + \frac{(t-t_{n-1})(t-t_n)}{2\Delta t^2} y_{n+1}$$

Hieruit volgt dan door differentiatie meteen:

$$\dot{y}(t) = \frac{t-t_{n+1}+t-t_n}{2\Delta t^2} y_{n-1} - \frac{t-t_{n+1}+t-t_{n-1}}{\Delta t^2} y_n + \frac{t-t_n+t-t_{n-1}}{2\Delta t^2} y_{n+1}$$

en

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{\Delta t^2} y_{n-1} - \frac{2}{\Delta t^2} y_n + \frac{1}{\Delta t^2} y_{n+1}$$

en dus ook

$$\dot{y}_n = \dot{y}(t_n) = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta t}$$

en

$$\ddot{y}(t_n) = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\Delta t^2}$$

### **einde intermezzo**

De snelheden en versnellingen worden uitgedrukt in termen van de verplaatsingen op  $t_{n-1}$ ,  $t_n$  en  $t_{n+1}$  met behulp van de volgende differentieformuleringen:

$$\dot{u}_{\sim n} = \frac{1}{2\Delta t} (u_{\sim n+1} - u_{\sim n-1}) \quad \text{en} \quad \ddot{u}_{\sim n} = \frac{1}{\Delta t^2} (u_{\sim n+1} - 2u_{\sim n} + u_{\sim n-1}).$$

Substitutie in de gediscretiseerde bewegingsvergelijking op tijdstip  $t_n$  levert dan:

$$\left\{ \frac{1}{\Delta t^2} \underline{M} + \frac{1}{2\Delta t} \underline{C} \right\} u_{\sim n+1} = f_{\sim n} - \underline{K} u_{\sim n} + \frac{1}{\Delta t^2} \underline{M} \left\{ 2u_{\sim n} - u_{\sim n-1} \right\} + \frac{1}{2\Delta t} \underline{C} u_{\sim n-1}$$

op basis waarvan  $u_{\sim n+1}$  kan worden opgelost.

Dit heet dan een expliciet tweestaps schema omdat de waarde van de verplaatsingen op twee tijdstippen in het verleden worden gebruikt voor de bepaling van de verplaatsing op het meest nabije tijdstip in de toekomst. Het is zonder meer duidelijk dat een startprocedure nodig is omdat  $u_{\sim -1} = u(t = t_{-1})$  niet bestaat. We formuleren daarom een fictieve  $u_{\sim -1}$  die we afleiden door uit de differentieformule voor de snelheid, toegepast voor  $n = 0$ ,  $u_{\sim -1}$  te elimineren. Dan volgt:

$$u_{\sim -1} = u_{\sim 0} - \Delta t \dot{u}_{\sim 0} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{u}_{\sim 0}.$$

Hierin zijn  $u_{\sim 0}$  en  $\dot{u}_{\sim 0}$  gegeven via de beginvoorwaarden en wordt  $\ddot{u}_{\sim 0}$  bepaald uit de gediscretiseerde bewegingsvergelijking op tijdstip  $t_0$  volgens:

$$\ddot{u}_{\sim 0} = \underline{M}^{-1} \left[ f_{\sim 0} - \underline{C} \dot{u}_{\sim 0} - \underline{K} u_{\sim 0} \right]$$

Dus geldt

$$u_{\sim -1} = u_{\sim 0} - \Delta t \dot{u}_{\sim 0} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \underline{M}^{-1} \left\{ f_{\sim 0} - \underline{C} \dot{u}_{\sim 0} - \underline{K} u_{\sim 0} \right\}$$

Opgemerkt kan worden dat het gebruik van diagonaalmatrices voor de massamatrix (lumped massamatrix) en dempingsmatrix een enorme versnelling van het rekenproces oplevert. Alleen dan kunnen de expliciete methoden de competitie met impliciete methoden, die veel minder tijdstappen vergen, doorstaan.

De centrale differentiemethode is slechts conditioneel stabiel. Dat wil zeggen dat wanneer de tijdstap een bepaalde waarde (de kritische tijdstap) overschrijdt, de fout exponentieel groeit en de oplossing divergeert t.o.v. de exacte tijdsafhankelijke respons van de discrete vergelijkingen. De kritische tijdstap hangt van de ruimtelijke discretisatie van het elementenmodel af. Hoe kleiner de maat van de elementen hoe kleiner de kritische tijdstap wordt en dus hoe meer tijdstappen nodig zijn om een bepaald tijdsinterval te bestrijken. Dit is een karakteristiek van de meeste expliciete schema's en ook enkele impliciete schemas. In fysische termen: de kritische tijdstap met betrekking tot stabiliteit is gerelateerd aan de tijd die een spanningsgolf nodig heeft om zich over het kleinste element in het elementenrooster voort

te planten en kan zo dus worden geschat. Als we een goede nauwkeurigheid willen dan moet afgezien van de stabiliteit voor de tijdstap in het centrale differentie schema gelden:

$$\Delta t_{cr} \leq \frac{2}{\omega_{\max}} = \frac{T_{\min}}{\pi}$$

Hierin is  $\omega_{\max}$  de hoogste natuurlijke eigenfrequentie van het ongedempte systeem en  $T_{\min}$  de daarbij behorende kleinste trillingstijd.

Als expliciete schema's stabiel zijn dan is de nauwkeurigheid in het algemeen ook goed omdat de tijdstappen die klein genoeg zijn om aan het stabiliteitscriterium te voldoen in het algemeen veel kleiner zijn dan de tijdschaal van de globale respons. De tijdstap kan dan dicht in de buurt van de stabiliteitsgrens gekozen worden zonder verlies van nauwkeurigheid. Kleinere tijdstappen dan de stabiliteitsgrens leveren alleen maar verbetering op voor de hogere frequenties die in het algemeen maar weinig bijdragen aan het globale mechanische gedrag. Bovendien is de nauwkeurigheid van de hoogfrequente componenten doorgaans slecht.

#### 5.2.4.2 De impliciete trapeziumregel.

Bij impliciete schema's is de hoeveelheid rekentijd per tijdstap meestal veel groter, maar daar staat tegenover dat met betrekking tot de nauwkeurigheid en stabiliteit van de oplossing veel grotere tijdstappen gemaakt kunnen worden. De trapeziumregel is een recht toe recht aan impliciete methode. We gaan uit van de bewegingsvergelijking op tijdstip  $t_{n+1}$ :

$$\underline{M} \ddot{u}_{\sim n+1} + \underline{C} \dot{u}_{\sim n+1} + \underline{K} u_{\sim n+1} = f_{\sim n+1}$$

#### *Intermezzo*

Voor een scalaire functie,  $y = y(t)$  wordt volgens de trapeziumregel ter benadering gesteld:

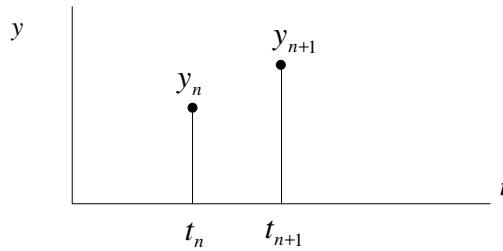
$$\frac{\dot{y}_n + \dot{y}_{n+1}}{2} \Delta t = y_{n+1} - y_n \Rightarrow \dot{y}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} (y_{n+1} - y_n) - \dot{y}_n$$

en

$$\frac{\ddot{y}_n + \ddot{y}_{n+1}}{2} \Delta t = \dot{y}_{n+1} - \dot{y}_n \Rightarrow \ddot{y}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} (\dot{y}_{n+1} - \dot{y}_n) - \ddot{y}_n$$

of wel

$$\ddot{y}_{n+1} = \frac{4}{\Delta t^2} (y_{n+1} - y_n) - \frac{4}{\Delta t} \dot{y}_n - \ddot{y}_n$$



### Einde intermezzo

Voor  $\dot{u}_{\sim n+1}$  en  $\ddot{u}_{\sim n+1}$  wordt genoteerd:

$$\dot{u}_{\sim n+1} = \frac{2}{\Delta t} \left( u_{\sim n+1} - u_{\sim n} \right) - \dot{u}_{\sim n} \quad (a)$$

en

$$\ddot{u}_{\sim n+1} = \frac{4}{\Delta t^2} \left( u_{\sim n+1} - u_{\sim n} \right) - \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_{\sim n} - \ddot{u}_{\sim n} \quad (b)$$

Substitutie van de laatste twee vergelijkingen in de gediscretiseerde bewegingsvergelijking op tijdstip  $t_{n+1}$  en herschikking levert dan:

$$\left\{ \left( \frac{4}{\Delta t^2} \right) \underline{M} + \left( \frac{2}{\Delta t} \right) \underline{C} + \underline{K} \right\}_{\sim n+1} u_{\sim n+1} = f_{\sim n+1} + g_{\sim n} \quad (c)$$

waarbij  $g_{\sim n}$  een kolom is met grootheden op het tijdstip  $t_n$  volgens:

$$g_{\sim n} = \underline{M} \left\{ \left( \frac{4}{\Delta t^2} \right) u_{\sim n} + \left( \frac{2}{\Delta t} \right) \dot{u}_{\sim n} + \ddot{u}_{\sim n} \right\} + \underline{C} \left\{ \left( \frac{2}{\Delta t} \right) u_{\sim n} + \dot{u}_{\sim n} \right\}.$$

Eerst wordt  $u_{\sim n+1}$  uit vergelijking (c) opgelost en vervolgens kunnen  $\dot{u}_{\sim n+1}$  en  $\ddot{u}_{\sim n+1}$  uit (a) en (b) bepaald worden. Vervolgens wordt  $n$  met 1 opgehoogd en wordt de cyclus herhaald. Uiteraard moeten de randvoorwaarden  $u_{\sim 0}$  en  $\dot{u}_{\sim 0}$  bekend zijn.

De beginversnelling wordt wederom bepaald uit de bewegingsvergelijking bij  $t = 0$ :

$$\ddot{u}_{\sim 0} = \underline{M}^{-1} \left[ f_{\sim 0} - \underline{C} \dot{u}_{\sim 0} - \underline{K} u_{\sim 0} \right].$$

Op te merken valt dat in het linkerlid van (c) de stijfheidsmatrix voorkomt. De individuele vergelijkingen zijn daarom gekoppeld door de termen buiten de diagonaal van de stijfheidsmatrix, zelfs als we een lumped massamatrix gebruiken. Dit feit veroorzaakt veel meer rekentijd per tijdstap dan bij de toepassing van een expliciet schema.

### 5.2.4.3 Geavanceerdere integratieschemas

In het boek “Finite Element procedures in engineering analysis” van Bathe zijn een aantal geavanceerdere impliciete integratieschema's te vinden. We noemen hier slechts de meest bekende:

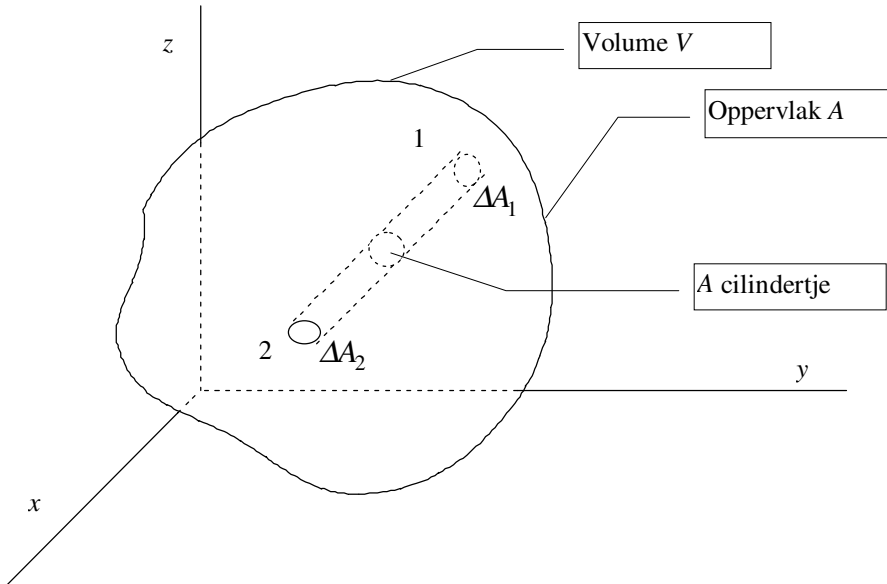
- de methode Houbolt zonder parameters
- de methode Wilson- $\theta$  met een parameter  $\theta$
- de methode Newmark met twee parameters  $\alpha$  en  $\delta$

Ieder van deze impliciete methoden hebben hun eigen merites en de parameters hebben invloed op de aard van de onnauwkeurigheid, de stabiliteit en de mate en aard van de numerieke demping. Zo geldt voor de (meest gebruikte) methode Newmark onvoorwaardelijke stabiliteit (d.w.z. geen groei van de amplitudfout in de tijd) mits de parameters in een bepaald domein liggen. In het programmapakket Marc/Mentat wordt “default” gekozen voor numerieke tijdsintegratie volgens de methode Newmark met  $\alpha = 0,25$  en  $\delta = 0,5$ . Deze methode is dan identiek is aan de behandelde trapeziummethode en onvoorwaardelijk stabiel.

# Appendix A

## De stelling van Gauss

Beschouw een volume  $V$  in de driedimensionale ruimte, een functie  $f(x, y, z)$  van de ruimtelijke coördinaten en de integraal  $\int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV$ .



We kunnen voor deze integraal schrijven:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV &= \sum_{\text{cilindertjes}} \left( \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial x} dx \right) A_{\text{cilindertje}} = \sum_{\text{cilindertjes}} (f_2 - f_1) A_{\text{cilindertje}} \\ &= \sum_{\text{cilindertjes}} (f_2 n_{x_2} \Delta A_2 + f_1 n_{x_1} \Delta A_1) \\ &= \int_A f n_x dA \end{aligned}$$

Neem nu  $f(x, y, z) = g(x, y, z)h(x, y, z)$ ; dan volgt:

$$\begin{aligned} \int_V h \frac{\partial g}{\partial x} dV + \int_V \frac{\partial h}{\partial x} g dV &= \int_A h g n_x dA \\ \int_V h \frac{\partial g}{\partial y} dV + \int_V \frac{\partial h}{\partial y} g dV &= \int_A h g n_y dA \\ \int_V h \frac{\partial g}{\partial z} dV + \int_V \frac{\partial h}{\partial z} g dV &= \int_A h g n_z dA \end{aligned}$$

Toepassing op al de afzonderlijke termen van  $\int_V \left( \hat{w}^T (\underline{\partial}^T \underline{\sigma}) + (\underline{\partial} \underline{w})^T \underline{\sigma} \right) dV$

levert:

$$\int_{V_e} \left( \hat{w}^T (\underline{\partial} \underline{\sigma}) + (\underline{\partial} \hat{w})^T \underline{\sigma} \right) dV = \int_{A_e} \hat{w}^T (\underline{n} \underline{\sigma}) dA$$

Uit de gewogen afwijkingen formulering van het evenwicht kan herleid worden:

$$\int_{V_e} \hat{w}^T (\underline{\partial} \underline{\sigma} + \underline{q}) dV = \int_{A_e} \hat{w}^T (\underline{n} \underline{\sigma}) dA - \int_{V_e} \left( (\underline{\partial} \hat{w})^T \underline{\sigma} \right) dV + \int_{V_e} \hat{w}^T \underline{q} dV = 0$$

of

$$\int_{V_e} \left( (\underline{\partial} \hat{w})^T \underline{\sigma} \right) dV = \int_{A_e} \hat{w}^T (\underline{n} \underline{\sigma}) dA + \int_{V_e} \hat{w}^T \underline{q} dV$$

Deze laatste vergelijking ( de zwakke formulering van het evenwicht) is het uitgangspunt bij de discretisering met de eindige elementenmethode.

# Referenties

- [1] K.J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1982).
- [2] W.A.M. Brekelmans, *Toepasbare sterkteleer*, syllabus, TUE Eindhoven, (1978).
- [3] W.A.M. Brekelmans en P.J.G. Schreurs, *Elasticiteit en Inleiding Plasticiteit*, syllabus, TUE Eindhoven, (1985).
- [4] J.S. Przemieniecki, *Theory of matrix structural analysis*, McGraw-Hill, New York, (1968).
- [5] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, Berkshire, (1989).
- [6] R.J. Astley, *Finite elements in solids and structures*, Chapman & Hall, London, (1992).
- [7] A Finite Element Dynamics Primer, edited by D. Hitchings, Nafems, Glasgow, (1992).
- [8] D.H. van Campen, *Het dynamisch gedrag van constructies*, syllabus, TUE, Eindhoven.
- [9] A.A.H.J. Sauren, F.E. Veldpaus, J.H.P. de Vree, *Inleiding Dynamica*, syllabus, TUE, Eindhoven, (1989).
- [10] R.T. Fenner, *Mechanics of Solids*, Blackwell scientific publications, Oxford, (1989).
- [11] T.J.R Hughes, *The Finite element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1987).